

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XX.

DEPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez WILLIAMS et NORGATE,	chez HERMANN, libraire,	chez FRIEDLÄNDER u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 8.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

MARS 1898.

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XX.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

AU 1er MARS 1898.

Bureau.

Président,	M. G. Dewalque.
Vice-Président,	» J. Neuberg.
Secrétaire général,	» C. le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	» J. Deruyts.

Membres effectifs.

1842 Selys Longchamps (baron E. de), membre de l'Académie royale de Belgique.

1853 Candèze, E., membre de l'Académie royale de Belgique, à Glain par Liége.

1855 Dewalque, G., professeur à l'université de Liége, membre de l'Académie royale de Belgique.

1860 Gillon, A., professeur à l'université.

1870 Masius, V., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Vanlair, C., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1871 Van Beneden, Éd., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1874 Firket, Ad., chargé de cours à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

1878 le Paige, C., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1879 Jorissen, A., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1880 Neuberg, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1881 Fraipont, J., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1884 Deruyts, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Ronkar, Ém., professeur à l'université.

Ubaghs, P., répétiteur à l'université.

1885 Gravis, A., professeur à l'université.

1887 Lohest, M., professeur à l'université.

Deruyts, Fr., docteur en sciences, chargé de cours à l'université.

De Heen, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1890 Beaupain, J., docteur en sciences, ingénieur au corps des mines.

1897 Cesàro, G., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1898 Hubert, H., chargé de cours à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1855 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.
1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro, maire de Cherbourg.
1863 Gossage, membre de la Société chimique, à Londres.
1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.
De Colnet d'Huart, conseiller d'État, à Luxembourg.
Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.
Folie, F., directeur honoraire de l'Observatoire royal de Bruxelles.
1866 Ledent, professeur au collège communal de Verviers.
1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York.
1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.
Schlömilch, professeur d'analyse à l'École polytechnique de Dresde.
1870 Bertrand, J. L. F., membre de l'Institut, à Paris.
1871 Henry, L., professeur à l'université de Louvain.
Durége, professeur à l'université de Prague.
Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.
Le Boulengé, P., général.
1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.
Garibaldi, professeur à l'université de Gênes.
Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg.
1873 Hermite, Ch., membre de l'Institut, à Paris.
Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.
1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.

1875 Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).

Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Czuber, professeur, à Prague.

1880 Cremona, Luigi, directeur de l'École d'application, à Rome.

Studnička, F., professeur de mathématiques à l'université de Prague.

Van der Mensbrugghe, Gustave, professeur à l'université de Gand.

De Tilly, J., général, membre de l'Académie royale de Belgique, à Bruxelles.

1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.

Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.

Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.

Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.

Quincke, professeur de physique, à Heidelberg.

Guiscardi, professeur à l'université de Naples.

Laisant, C.-A., député, à Paris.

Beltrami, professeur à l'université de Pavie.

1882 Mascart, membre de l'Institut, à Paris.

1883 Breithof, N., professeur à l'université de Louvain.

Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.

Gomès Teixeira, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.

1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.

Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.

de Longchamps (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.

Vaněček, J. S., professeur. à Jičin (Bohême).

1885 Cesàro, E., professeur à l'université, à Naples.
1887 Walras, L., professeur à l'Académie de Lausanne.
Guccia, docteur en sciences, à Palerme.
Wullner, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.
Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.
1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École des ponts et chaussées, à Paris.
1898 Gordan, P., professeur à l'université d'Erlangen.
Korteweg, D.-J., professeur à l'université d'Amsterdam.
Lampe, Em., directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, professeur à Berlin.
Mathias, Em., professeur à l'université de Toulouse.
Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.

II. — Sciences naturelles.

1853 Waterhouse, Ch., conservateur au Musée britannique, à Londres.
1854 Drouët, H., naturaliste, à Dijon.
Lucas, H., aide-naturaliste au Museum d'histoire naturelle, à Paris.
Blanchard, E., membre de l'Institut, à Paris.
1855 Geinitz, H. B., professeur à l'École polytechnique, à Dresde.
1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.
Brüner de Watteville, directeur général des télégraphes, à Vienne.
1865 Le Jolis, archiviste perpétuel de la Société des sciences naturelles de Cherbourg.
Hamilton, membre de la Société géologique de Londres.
De Borre, A., ancien conservateur au Musée royal d'histoire naturelle de Bruxelles, à Genève.
1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille.
Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.

1869 Simon, E., naturaliste, à Paris.

1870 Trautschold, professeur, à Carlsruhe.
Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.

1871 Thomson, James, vice-président de la Société géologique de Glasgow.
Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.
Hall, James, paléontologiste de l'État, à Albany.
Whitney, J. D., géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie.
Glaziou, botaniste, directeur des Jardins impériaux à Rio de Janeiro.
De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.
Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.
Areschoug, professeur adjoint à l'université de Lund.

1874 Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.
Häckel, professeur à l'université de Iéna.
Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.

1875 Eimer, professeur à l'université de Tubingue.
De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.
Ray-Lankester, professeur à l'université de Londres.
Packard, professeur à l'université de Salem.
Flemming, W., professeur à l'université de Kiel.
Plateau, F., professeur à l'université de Gand.

1876 Balfour, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 Hertwig, R., professeur à l'université de Munich.
Strasburger, professeur à l'université de Bonn.
Brongniart, Charles, à Paris.

1879 Wetterby, professeur à l'université de Cincinnati.
Bolivar, I., professeur, à Madrid.
Ritsema, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.
Renard, Alphonse, professeur à l'université de Gand.

1881 Key, Axel, professeur à l'École de médecine de Stockholm.
Retzius, G., professeur à l'École de médecine de Stockholm.
Taramelli, professeur à l'université de Pavie.
Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.
Salvadori (comte Th.), professeur à l'université de Turin.

1883 Hull, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.
Sandberger, Fridolin, professeur à l'université de Wurzbourg.

1884 Trinchese, professeur à l'université de Naples.

1898 Crépin, Fr., membre de l'Académie royale de Belgique, à Bruxelles.
Milne Edwards, Alph., directeur du Museum d'histoire naturelle, à Paris.
Agassiz, Alexandre, à Cambridge (Mass.).
Bertrand, C.-E., professeur de botanique à la Faculté des sciences de Lille.
Blanchard, Raphaël, assistant au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.

Liége. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeurs : P. Mansion et J. Neuberg.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, directeur : M. Lampe (Kurfürstenstr. 139).

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Trieste. — *Società adriatica di Scienzi naturali.*

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.
Monatshefte für Mathematik und Physik, rédacteurs : MM. Escherich et Gegenbauer, professeurs à l'université.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Paris. — *Société Philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Societé des sciences physiques et naturelles.
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di scienze naturali e economiche.*
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra.

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *École polytechnique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques,* rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Kazan. — *Société physico-mathématique.*

Kharkoff. — *Société mathématique.*

Juriew. — *Université.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

SUÈDE ET NORVÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Stavanger. — *Museum.*

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Nordist medicinskt Arkiv, directeur : Dr Axel Key.
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Drs Juel et Foldberg (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schaffhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

ÉTATS-UNIS.

American Association for advancement of sciences.

Austin. — *Texas Academy of sciences.*

Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Rochester. — *Academy of sciences.*

Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*

Salem. — *Essex Institute.*

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*

CANADA.

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*
Commission de géologie et d'histoire naturelle du Canada.

Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

AUSTRALIE.

Australian Association for advancement of science.

Adelaïde. — *Royal Society of South Australia.*

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*
Royal Society of New South Wales.

MÉMOIRE

SUR LES

VARIATIONS DES HAUTEURS CAPILLAIRES

ET

DES TENSIONS SUPERFICIELLES DE L'EAU DE L'ALCOOL ET DES SOLUTIONS D'EAU ET D'ALCOOL AVEC LA TEMPÉRATURE

TEMPÉRATURES CRITIQUES DE L'EAU. DE L'ALCOOL ET DES SOLUTIONS D'EAU ET D'ALCOOL

PAR

Armand SOHET

Docteur en sciences physiques et mathématiques

MÉMOIRE

SUR LES

VARIATIONS DES HAUTEURS CAPILLAIRES

ET

DES TENSIONS SUPERFICIELLES DE L'EAU DE L'ALCOOL ET DES SOLUTIONS D'EAU ET D'ALCOOL AVEC LA TEMPÉRATURE.

Ce travail peut se diviser en trois parties :

I. — Étude des variations des hauteurs capillaires avec la température, le ménisque étant en contact avec l'air ambiant. La pression supportée par le liquide est donc la pression atmosphérique.

II. — Étude des variations des hauteurs capillaires avec la température, le ménisque étant en contact avec sa vapeur. La pression supportée par le liquide est donc celle de sa vapeur.

III. — Étude des variations de la tension superficielle avec la température.

I.

Voici, exprimées en grammes, les différentes quantités d'eau et d'alcool contenues dans les solutions sur lesquelles nous avons opéré :

NUMÉRO de la solution.	POIDS de l'eau.	POIDS total.	POIDS de l'alcool.	TITRE.
1 (Eau distillée).	»	»	»	0,000
2	45,187	47,431	2,244	4,731
3	45,160	49,750	4,590	9,226
4	29,729	34,368	4,639	13,498
5	29,836	36,006	6,170	17,136
6	29,648	37,470	7,822	20,875
7	29,810	39.244	9.434	24.039
8	30.152	41.360	11.208	27,098
9	29,447	42,184	12,737	30,193
10	29,448	43,730	14,282	32,659
11	29.347	45,085	15,738	34,907
12	29,562	46,539	16,977	36,479
13	29,546	47,653	18,107	37,997
14	14,919	30.043	15,124	50,341
15	9,165	26,661	17,496	65,623
16 (Alcool absolu).	»	»	»	100,000

Ces solutions ont été préparées avec grand soin, les pesées poussées jusqu'au milligramme. Elles ont été enfermées dans des flacons bouchés à l'émeri pour empêcher autant que possible l'évaporation. Ces derniers avaient été préalablement lavés à l'alcool et rincés à l'eau distillée.

Pour plus de facilité, nous avons ramené ces diverses quan-

tités à un même poids 100 grammes. Nous aurons pour le titre de nos solutions (Si α est la quantité d'eau contenue dans la solution, β le poids de l'alcool, nous appellerons titre de la solution $100 \frac{\beta}{\alpha + \beta}$).

Précautions à prendre.

L'appareil employé étant celui de M. De Heen [1].

Un point très important est de placer le tube capillaire bien vertical; car, puisqu'on lit la graduation sur le tube même, le moindre écart dans la verticalité de ce dernier peut conduire à des erreurs considérables. Le meilleur moyen pour cela est de fixer parfaitement les tubes en verre dans le couvercle en cuivre, ce que nous avions fait d'abord en employant du ciment. Mais la température s'élevant, il ne tardait pas à se désagréger, ce qui compromettait la rigidité de l'appareil, et en tombant dans l'eau contenue dans le vase de Berlin la troublait, ce qui rendait les observations difficiles. Le procédé qui nous a le mieux réussi est de caler les tubes au moyen d'éclats de bois, de laisser ensuite couler du collodion, ce qui formait une espèce de mastic très résistant qui s'est convenablement comporté jusqu'aux températures auxquelles nous avons opéré.

Les deux tubes sont alors serrés dans une pince qui peut glisser le long d'un support de façon à obtenir des hauteurs convenables. Le pied du support est placé sur un plateau muni de trois vis calantes.

Cette disposition adoptée, voici comment on place le tube capillaire bien vertical. A gauche de l'appareil se trouve un fil à plomb. Le couvercle est serré dans la pince de manière que le fil à plomb et le réticule vertical de la lunette cachent approximativement la colonne capillaire. Puis, grâce aux vis calantes, on fait en sorte que le fil à plomb, le réticule et la colonne coïncident parfaitement.

*
* *

[1] P. De Heen, *La Chaleur*, p. 125, Nierstrasz, éditeur. Liége, 1894.

Pour que l'expérience réussisse, il faut que le tube capillaire soit parfaitement propre. Celui dont nous nous somme servi est resté plongé environ soixante heures dans l'acide sulfurique, puis il a été rincé à l'alcool et séché à l'éther.

*
* *

A environ $1^m,50$ de l'appareil se trouve une lunette qui permet de lire la graduation à laquelle affleure le ménisque. Elle est placée sur un pied dont le plateau supérieur est muni d'une crémallière, en sorte qu'on peut la mettre à la hauteur voulue. La lunette est munie d'un niveau fixe, et au moyen de trois vis calantes on peut la placer dans un plan vertical. Le réticule sera par conséquent bien vertical, ce qui assure la verticalité du tube capillaire.

Marche d'une expérience.

On s'assure d'abord que le tube capillaire est bien vertical. On l'enlève et on verse une petite quantité de liquide (pour éviter la dilatation) dans l'ampoule. Le tube capillaire est alors introduit. Quand il est assez près du liquide, on y voit parfaitement son image. Au moyen de l'ajustage en caoutchouc graissé de vaseline, on lui donne un mouvement de rotation et de descente très lent. Lorsque le tube et son image se touchent, il est en contact avec le liquide. Du reste, on en est averti par le liquide qui s'y élève rapidement. Il faut avoir soin de disposer du tube capillaire de façon que, le contact étant établi, la graduation soit bien placée pour faire une lecture; c'est-à-dire dirigée vers la lunette.

Un long tuyau en caoutchouc s'emboite sur le tube libre et arrive au pied de la lunette. Pour que le liquide puisse monter dans le tube capillaire, il faut qu'il le mouille parfaitement. Pour cela il suffit de presser entre les doigts le tube de caoutchouc; on exerce ainsi une légère pression et le liquide s'élève sensiblement dans le tube capillaire. Il est bon d'exercer très

souvent cette pression dans le cours d'une expérience, de l'exercer au moins avant chaque observation. L'appareil plonge dans un vase de Berlin contenant de l'eau. Celui-ci est supporté par un trépied sous lequel se trouve un brûleur Bunsen. Un thermomètre, au dixième de degré, est plongé dans le bain d'eau. Un autre thermomètre donne la température de l'air ambiant. Il est serré contre le premier au moyen de deux bagues en caoutchouc. On règle la flamme du brûleur de façon à obtenir une température constante. On lit alors au moyen de la lunette le point d'affleurement du ménisque. Le tube étant gradué au $^1/_5$ de millimètre, on a la hauteur capillaire très exactement. (Un bec à gaz se trouve derrière le vase de Berlin, et éclaire la colonne capillaire et la graduation.)

Pour plus de facilité et pour pouvoir comparer entre elles nos diverses observations, nous rapporterons toutes les hauteurs capillaires à un tube de $^1/_2$ millimètre de diamètre, le calcul étant effectué d'après la loi de Jurin.

Le tube sur lequel nous avons opéré avait $^{195}/_{400}$ de millimètre de diamètre. Par conséquent, si h est la hauteur observée, la hauteur h' rapportée à un tube de $^1/_2$ millimètre de diamètre sera donnée par la formule

$$h' = \frac{h.195}{200}.$$

Voici les résultats obtenus avec nos différentes solutions.

1. EAU DISTILLÉE.

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de $^1/_2$ mill.
0,7	62,5						
0,7	62.5	17,5	0,7	»	»	62,5	60,9375
0,7	62,5						
7,5	61,7						
7,6	61,7	17,5	7,6	»	»	61,7	60,1575
7,7	61,7						
20,5	60,3						
20,7	60,3	20,5	20,66	»	»	60,3	58,7925
20.8	60,3						
30,3	59,2						
30.5	59,2	20,5	30,43	0,03	30,46	59,2	57,720
30,5	59,2						
41,7	57,9						
41,7	57,9	20,5	41,7	0,09	41,79	57,9	56,4525
41,7	57,9						

48,3	57,2						
48,3	57,2	20,5	48,3	0,15	48,45	57,2	55,770
48,3	57,2						
58,8	56,0						
59,0	56,0	22,0	58,97	0,22	59,19	56,0	54,600
59,1	56,0						
70,9	54,6						
71,0	54,6	22,0	70,97	0.42	71,39	54,6	53,235
71,0	54,6						
79,3	53,7						
79,4	53,7	22,5	79,23	0,50	79,73	53,7	52,3575
79,0	53,7						
89,1	52,5	22	88.43	0,69	89,12	52,5	51,1875
88,7	52,5						
94,5	51,7						
95,0	51.7	23	94,77	0,80	95,57	51,7	50,4075
94,8	51.7						

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Bornstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

2. 4,731 % ALCOOL.

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de 1/2 mill.
0,7	50,2						
0,7	50,2	25,0	0,77	»	»	50,2	48,945
0,9	50 2						
7,4	49,1						
7,4	49,1	24,0	7,47	»	»	49,1	47,8725
7,6	49,1						
16,3	47,8						
16,5	47,8	24,5	16,47	»	»	47,8	46,605
16,6	47,8						
27,8	46,27						
28,0	46,27	24,5	28,0	0,01	28,01	46,27	45,110
28,2	46,27						
41,0	44,8						
41,0	44,8	24,5	41,33	0,06	41,39	44,8	43,680
41,4	44,8						

50,0	44,0						
50,2	44,0	24,5	50.17	0,12	50,29	44,0	42,900
50,3	44,0						
59,6	43,27						
59.7	43,27	25,0	59,70	0,19	59,89	43,27	42,185
59,8	43,27						
70,4	42,4						
70,3	42,4	25,0	70,27	0,35	70.62	42,4	41,340
70,1	42,4						
81,2	42,05						
80,9	42,05	25,0	80,53	0,53	81,06	42,05	40,99875
80,5	42,05						

3. 9,226 % ALCOOL.

3,4	43,6						
3,3	43,6	20,0	3,26	»	»	43,6	42,540
3,1	43,6						

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein — Pour les temperatures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

3. 9,226 % ALCOOL (suite).

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de $^1/_2$ mill.
13,4	42,4						
13,55	42,4	19,7	13,52	»	»	42,4	41,340
13,6	42,4						
29,3	40,2						
29,5	40,2	21,5	29,48	0,01	29,49	40,2	39,195
29,65	40,2						
41,7	38,9						
42,7	38,8	22,5	42,63	0,06	42,69	38,8	37,830
43,5	38,7						
49,3	38,2						
49,8	38,0	23,5	49,7	0,15	49,85	38,0	37,050
50,0	37,8						
59,7	37,3						
59,4	37,3	24,5	59,43	0,26	59,69	37,3	36,3675
59,2	37,3						

71,1	36,4						
71,3	36,6	25,5	71,20	0,30	71,50	36,53	35,620
71,2	36,6						
80,7	35,9						
80,8	35,9	25,0	80,70	0,50	81,12	35,9	35,0025
80,6	35,9						
4. 13,498 °/o ALCOOL.							
11,1	39,4						
11,3	39,4	25,5	11,30	»	»	39,4	38,415
11,5	39,4						
18,75	38,1						
18,8	38,1	21,0	18,82	»	»	38,1	37,1475
18,9	38,1						
30,7	36,5						
31,8	36,5	23,5	31,66	0,03	31,69	36,47	35,555
32,5	36,4						

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15, il plonge jusqu'à la division 3.

4. 13,498 % ALCOOL (suite).

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de 1/2 mill.
43,45	35,2						
43,55	35,2	23,0	43,52	0,04	43,56	35,2	34,320
43,55	35,2						
50,8	34,5						
51,6	34,5	24,0	51,36	0,10	51,46	34,5	33,6375
51,7	34,5						
59,9	33,9						
60,0	33,9	25,0	60,03	0,13	60,16	33,9	33,0525
60,2	33,9						

5. 17,186 % ALCOOL.

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de 1/2 mill.
5 4	37,2						
5,1	37,2	20,4	5.12	»	»	37,2	36,270
4,85	37,2						
9,2	36,6						
9,3	36,6	20,0	9,3	»	»	36,6	35,685

25,7	34,4						
26,2	34,4	20,0	26,06	0,01	26,07	34,4	33,540
26,3	34,4						
40,5	33,0						
40,7	33,0	22,0	40,73	0,09	40,82	32,93	32,1425
41,0	32,9						
49,4	32,2						
49,7	32,2	22,5	49,63	0,17	49,80	32,2	31,395
49,8	32,2						
59,6	31,4						
59,5	31,4	23,5	59,46	0,25	59,71	31,4	30,615
59,6	31,4						
68,6	31,0						
68,6	31,0	23,0	68,57	0,35	68,92	31	30,225
68,5	31,0						
74,4	30,7						
74,6	30,7	23,5	74,53	0,43	74,96	30,7	29,9325
74,6	30,7						

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Laudolt et Börnstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

6. 20.875 °/o ALCOOL.

Température de l'eau	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée	Hauteur moyenne	Hauteur rapportée à un tube de $^1/_2$ mill.
3,55	35,0						
3,50	35,0	20,5	3,52	»	»	35,0	34,125
3,5	35,0						
12,4	33,8						
12,3	33,8	20,5	12,25	»	»	33,8	32,955
12,35	33,8						
21,2	32,8						
21,5	32,8	22,0	21,57	»	»	32,8	31,980
22,0	32,8						
29,4	32,0						
29,8	32,0	21,5	29.73	0,02	29.75	32,0	31,200
30,0	32,0						
40,6	31,0						
40,9	31,0	22.5	40,87	0,09	40,96	31,0	30,225
41,1	31,0						

49,7	30,4						
49,7	30,4	22,5	49,70	0,15	49,85	30,4	29,640
49,9	30,4						
59,5	29,8						
59,6	29,8	22,5	59,60	0,26	59,86	29,8	29,055
59,7	29,8						
68,9	29,3						
68,7	29,3	22,5	68,73	0,35	69,08	29,3	28,5675
68,6	29,3						
74,0	29,1						
74,1	29,1	24,5	74,33	0,43	74,76	29,1	28,3725
74,0	29,1						
80,1	28,7						
80,2	28.7	27,0	80,3	0,50	80,80	28,7	27,9825
80,3	28,7						

7. 24,039 % ALCOOL.

3,0	33,0						
2.8	33,0	22.5	2,86	»	»	33.0	32,175
2,8	33,0						

*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

7. 24,039 % ALCOOL (suite).

Température de l'eau	Hauteur capillaire	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de $^1/_2$ mill.
9,65	32,2						
9,8	32,2	22,0	9,78	»	»	32,2	31,395
9,9	32,2						
24,5	30,7						
24,65	30,7	22,0	24,62	»	»	30,7	29,9325
24,7	30,7						
30,7	30,2						
30,9	30,2	22,0	30,86	0,03	30,89	30,2	29,445
31,0	30,2						
40,5	29,5						
40,7	29,5	22,5	40,63	0,09	40,72	29,5	28,7625
40,7	29,5						
54,5	28,7						
54,2	28,7	23,8	54,20	0,47	54,37	28,7	27,9825

64,5	28,3	24,5	61,33	0,26	61,59	28,3	27.5925
61,4	28,3						
68,8	28,0						
68,8	28,8	24,5	68,76	0,35	69,11	28,0	27,300
68,7	28,0						
75,9	27,7						
75,95	27,7	25,0	75,65	0,43	76,80	27,7	27,0075
75,1	27,7						
83,3	27.5						
83.3	27,5	26,0	83,20	0,55	83,75	27,5	26,8125
83,0	27,5						

8. 27.098 % ALCOOL.

2,5	31,4						
2,25	31,4	20,3	2,35	»	»	31,4	30,615
2,3	31.4						

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

8. 27,098 % ALCOOL (suite).

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne	Hauteur rapportée à un tube de $1/2$ mill.
8,8	30,8						
8,9	30,8	19.5	8,88	»	»	30,8	30,030
8,95	30,8						
20,9	29,8						
21,4	29,8	20,2	20,66	»	»	29,8	29,055
21.7	29,8						
30.9	29,43						
31,1	29,43	20,5	31,08	0,03	31,11	29,43	28.405
31,25	29,43						
43,4	28,3						
43,6	28.3	20,5	43,53	0,09	43,62	28,3	27.5925
43,6	28,3						
49.3	28,0						
49.9	28,0	24,0	49,46	0,14	49,60	28,0	27,300
[illegible]	[illegible]						

60,4 60,45	27,47 27,47	25,0	60,83	0,24	61,07	27,47	26,780
69,2 69,3 69,3	27,4 27,4 27,4	26,0	69,27	0,35	69,62	27.4	26,4225
76,3 76,6 76,5	26,8 26,8 26,8	29,0	76,46	0,43	76.89	26,8	26,130
81,0 81,0	26,6 26,6	27,5	81,00	0,50	81.50	26,6	25,935

9. 30,193 % ALCOOL.

6,3 6,4 6,5	30,0 30,0 30,0	18.0	6,4	»	»	30,0	29,250

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

9. 30.193 % ALCOOL (suite).

Température de l'eau	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de $^{1}/_{2}$ mill.
9,0	29,8						
9,05	29,8	16,5	9,05	»	»	29,8	29,055
9,1	29,8						
23,2	28,8						
23,6	28,8	18,3	23,57	»	»	28,8	28,080
23,9	28,8						
30,0	28,3						
30,6	28,3	18,0	30,50	0,03	30,53	28,3	27,5925
30,9	28,3						
41,3	27,35						
41,7	27,35	19,0	41,63	0,09	41,72	27,7	27,0075
41,9	27,35						
49,3	27,3						
49,7	27,3	19,5	49,67	0,16	49,83	27,3	26,6175
50,0	27,3						

[illegible]	26,9						
60,0	26,9	20,5	60,0	0,28	60,28	26,9	26,2275
60,2	26,9						
69,7	26,47						
69,7	26,47	21,0	69,67	0.40	70.07	26,47	25,805
69,6	26,47						
78,4	26,2						
78,9	26.2	21,2	78,42	0,50	78,92	26,2	25,4475
78,4	26,2						

10. 32,659 °/₀ ALCOOL.

1,1	29,5						
1,1	29,5	25,0	1,1	»	»	29,5	28,7625
1,1	29,5						
8,1	29,0						
8,2	29,0	25,0	8.23	»	»	29,0	28,275
8,4	29,0						

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

10. 32.659 % ALCOOL (suite).

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée	Hauteur moyenne	Hauteur rapportée à un tube de $^1/_2$ mill.
19,8	28,3						
20,0	28,3	24,5	20,0	»	»	28,3	27,5925
20,2	28,3						
29,2	27,8						
29,7	27,8	25,0	29,60	0,01	29,61	27,8	27,105
29,9	27,8						
40,5	27,2						
40,6	27,2	24,0	40.60	0,07	40.67	27,2	26,520
40,7	27,2						
51,1	26,8						
51,4	26,8	25,5	51.37	0,14	51.51	26,8	26,130
51,6	26,8						
60,9	26,3	26,5	61,0	0.25	61.25	26,3	25,6425

69.7	26,0						
69,9	26,0	29,0	69.7	0,32	69,39	26,0	25,350
69,5	26,0						
79,9	25,5						
79,9	25,5	28,0	79.83	0,47	80,30	25,5	24,8625
79,7	25,5						

11. 34,907 % ALCOOL.

2,2	28,7						
2,0	28,7	23,5	2,07	»	»	28,7	27,9825
2.0	28,7						
10,7	28,2						
10,9	28,2	23.0	10,87	»	»	28.2	27,495
14,0	28,2						
22,0	27.6						
22,3	27,6	25,0	22.27	»	»	27,6	26,910
22,5	27 6						

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein. — Pour les températures au dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

11. 34,907 % ALCOOL (suite).

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de $^1/_2$ mill.
30,1	27,2						
30,7	27,2	24,5	30,60	0,02	30,62	27,2	26,520
31,0	27,2						
38,7	26,8						
39,2	26,8	24,5	39,40	0,05	39,45	26,8	26,130
39,4	26,8						
47,8	26,4						
47,9	26,4	24,0	47,87	0,12	47,99	26,4	25,740
47,9	26,4						
59,5	26,0						
59,8	26,0	25,5	59,77	0,15	59,92	26,0	25,350
60,0	26,0						
70,1	25,47						
70,4	25,47	24,5	70,47	0,35	70,82	25,47	24,830
70,9	25,47						

77,0	25,2						
76.8	25,2	25,0	76,97	0,46	77,43	25,2	24,570
77,1	25,2						
82.2	25,0						
82,3	25,0	25,5	82,10	0,54	82,64	25,0	24,375
81,8	25,0						

12. 36.479 % ALCOOL.

1,2	28,4						
1,1	28,4	23,0	1,03	»	»	28,4	27,690
0,9	28,4						
8,4	28,0						
8,5	28,0	23,0	8,5	»	»	28,0	27,300
8,6	28,0						
25,2	27,1						
25,7	27.1	23,0	25,57	.	»	27,1	26,4225
25,8	27,1						

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

12. 36.479 % ALCOOL (suite).

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de $^1/_2$ mill.
32,1	26,8						
32,4	26,8	24,5	32,37	0,03	32,40	26,8	26,130
32,6	26.8						
41,8	26,4						
41,8	26,4	23.0	41,8	0,08	41,88	26,4	25,740
41,8	26,4						
52,2	26,0						
52,4	26,0	25,5	52 33	0.15	52,48	26.0	25,350
52,4	26,0						
64,2	25,6						
61.4	25,6	25,5	61,27	0,25	61,52	25,6	24,960
64,2	25,6						
74,6	25,2						
74,5	25.2	25,5	74,37	0,43	74,80	25,1	24,4725
74,0	25.2						

79,0 79,0 78,9	25,0 25,0 25,0	25,5	78,97	0,50	79,47	25,0	24,375

13. 37,997 % ALCOOL.

1,8 1,6 1,6	28,0 28,0 28,0	20,5	1,67	»	»	28,0	27,300
10,0 10,1 10,2	27,5 27,5 27,5	21,5	10,1	»	»	27,5	26,8125
21,5 21,8 21,9	27,0 27,0 27,0	22,0	21,73	»	»	27,0	26,325
30,6 31,0 31,2	26,3 26,3 26,3	20,5	30,93	0,04	30,97	26,3	25,6425

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermometre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3

13. 37,997 % ALCOOL (suite).

Température de l'eau	Hauteur capillaire	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de $^{1}/_{2}$ mill
41,5	26,13						
42,1	26,13	20,5	42,40	0,09	42,49	26,11	25,1475
42,6	26,13						
52,2	25,73						
52,8	25,73	23,5	52,77	0,17	52,94	25,73	25,090
53,0	25,73						
59,6	25,4						
60,0	25,4	22,5	59,83	0,23	60,06	25,4	24,765
59,9	25,4						
69,0	25,07						
69,4	25,07	22,5	69,37	0,35	69,72	25,07	24,140
69,7	25,07						
14. 50,341 % ALCOOL							
0,8	26,7						
0,8	26,7	20,0	0,8	»	»	26,7	26,0325
[illegible]	[illegible]						

9,5	26,4						
9,6	26,4	21,0	9,6	»	»	26,4	25,740
9,7	26,4						
19,5	26,05						
19,8	26,05	21,0	19,77	»	»	26,05	25,39875
20,0	26,05						
31,4	25,6						
31,7	25,6	21,0	31,63	0,03	31,66	25,6	24,960
31,8	25,6						
39,9	25,2						
40,3	25,2	21,0	40,20	0,08	40,28	25,2	24,570
40,4	25,2						
50,8	24,8						
51,1	24,8	26,0	51,0	0,12	51,12	24,8	24,180
51,1	24,8						
60,0	24,5						
60,0	24,5	26,0	59,90	0 22	60,12	24,5	23,856
59,7	24,5						

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

14. 50,341 % ALCOOL.

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de $^1/_2$ mill.
70,8	24,0						
71,0	24,0	29,0	70,93	0,34	71,27	24,0	23,400
71,0	24,0						
79,0	23,4						
79,2	23,4	26,0	79,10	0,45	79,55	23,4	22,815
79,4	23,4						

15. 65,623 % ALCOOL.

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de $^1/_2$ mill.
0,9	26,0						
1,0	26,0	21,0	0,93	»	»	26,0	25,350
0,9	26,0						
8,7	25,6						
9,0	25,6	20,0	8,93	»	»	25,6	24,960
9,1	25,6						
19,1	25,1						
19,3	25,1	21,0	19,3	»	»	25,1	24,4725

33,6	24,6	22,5	33,57	0,03	33.60	24,6	23,985
33,7	24,6						
39,8	24,4						
40,1	24,4	23,0	40,03	0,06	40,09	24.4	23,790
40,2	24,4						
50.8	23,9						
51,2	23,9	26,0	51,10	0,13	51.23	23.9	23,3025
51,3	23,9						
63,9	23,4						
63,5	23,4	26,0	63,53	0,28	63,81	23,4	22,815
63,2	23,4						
70,8	23,0						
71,0	23,0	29,5	70,93	0,34	71,27	23,0	22.425
71,0	23,0						
80,1	22,6						
80,1	22.6	30,0	80,03	0,46	80,49	23,6	22,035
79,9	22,6						

(¹) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermomètre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

16. ALCOOL ABSOLU.

Température de l'eau.	Hauteur capillaire.	Température de l'air ambiant.	Température moyenne.	Terme de correction (*).	Température corrigée.	Hauteur moyenne.	Hauteur rapportée à un tube de $^1/_2$ mill.
0,9	24,9						
0,9	24,9	22,5	0,93		»	24,9	24,2775
1,0	24,9						
9,2	24,5						
9,3	24,5	21,5	9,3	»	»	24,5	23,8875
9,4	24,5						
20,0	23,9						
20,3	23,9	22,5	20,27	»	»	23,9	23,3025
20,5	23,9						
32,7	23,1						
33,0	23,1	22,5	32,93	0,03	32,96	23,1	22,5225
[illegible]	[illegible]						

44,6	22,5						
44,8	22,5	23,0	44,73	0,09	44,82	22,5	21,9375
44,8	22,5						
51,7	22,07						
51,7	22,07	25,0	51,63	0,13	51,76	22,07	21,515
51,5	22,07						
61,2	21,5						
61,6	21,5	26,0	61,50	0,25	61,75	21,5	20,9625
61,7	21,5						
69.8	20,9						
70,3	20,9	26,5	70.20	0,35	70.55	20,9	20,3775
70,5	20,9						
77,5	20.4	27,0	77,65	0,46	78,11	20,4	19,890
77,8	20,4						

(*) Le terme de correction a été pris dans les tables de Landolt et Börnstein. — Pour les températures au-dessous de 15°, le thermometre plonge jusqu'à la division 13 environ. Pour les températures au-dessus de 15°, il plonge jusqu'à la division 3.

Si nous portons les températures en abscisse, les hauteurs capillaires en ordonnée, nous obtenons les diagrammes A (v. tableau). Ces courbes sont suffisamment continues, d'autant plus que l'échelle choisie pour les tracer est très grande.

Elles montrent que les hauteurs capillaires diminuent avec la quantité d'alcool contenue dans la solution, la hauteur maximum étant évidemment celle de l'eau, la hauteur minimum celle de l'alcool.

Il faut remarquer la chute rapide de la colonne capillaire pour de faibles dosages d'alcool.

II.

On sait qu'à la température critique, la hauteur capillaire est nulle. Or, si nous prolongeons nos diagrammes jusqu'à l'axe des abscisses, nous obtiendrons des températures beaucoup trop élevées. Il est donc évident que les courbes doivent présenter sur leur prolongement un point d'inflexion. Par conséquent, il est intéressant d'observer les variations de la hauteur capillaire à des températures plus élevées. Pour y arriver, le liquide doit être soumis à des pressions assez considérables pour éviter l'ébullition. Ces recherches nous occuperont à présent.

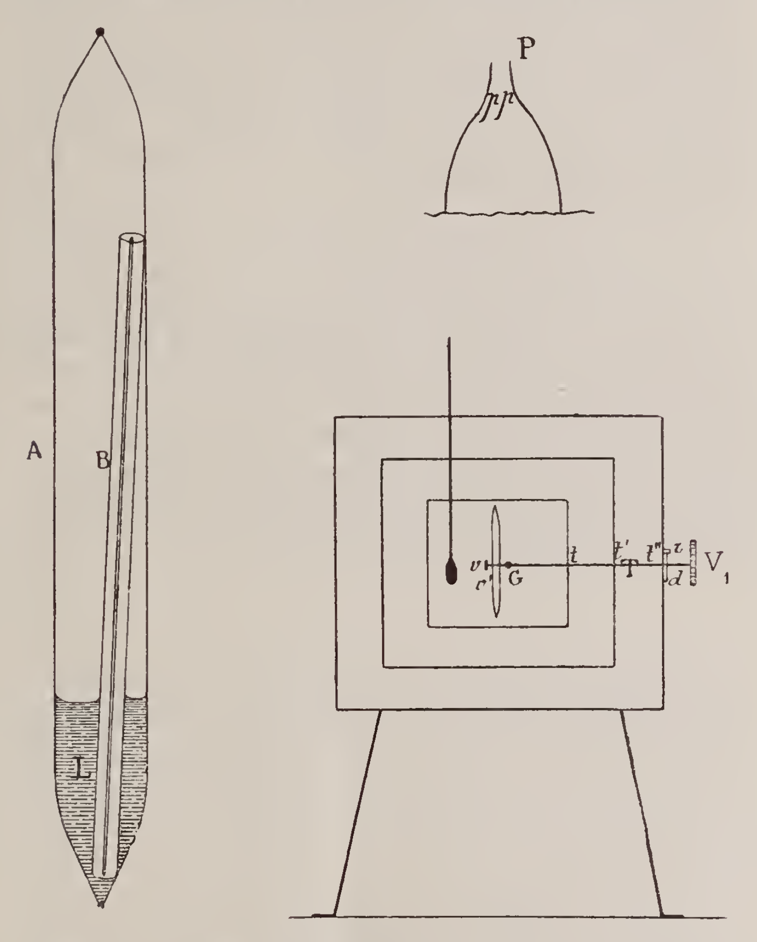
Les solutions sur lesquelles nous avons opéré dans la première partie ayant été épuisées, nous en avons fait de nouvelles dont les titres sont à peu près les mêmes que ceux des solutions 2, 6, 8, 10, 12, 13.

Voici, exprimées en grammes, les différentes quantités d'eau et d'alcool contenues dans ces solutions :

Numéro de la solution.	Poids de l'eau.	Poids de l'alcool.	Titre.
I Eau distillée.	»	»	0 °/₀ alcool.
II	29,650	7,820	20,870 °/₀.
III	30,149	11,207	27,098 °/₀.
IV	29,448	14,280	32,653 °/₀.
V	29,558	16,988	36,497 °/₀.
VI	14,922	15,120	50,329 °/₀.
VII Alcool absolu.	»	»	100,000 °/₀.

Description de l'appareil.

L'appareil dont nous nous sommes servi se compose essentiellement d'un gros tube en verre très résistant A, scellé aux deux bouts. A l'intérieur de A se trouvent un tube capillaire B et le



liquide L sur lequel on veut opérer. Le tout est placé dans une chambre à air qui permet de réaliser des températures constantes données par un thermomètre plongeant dans la cage centrale. La hauteur capillaire est observée au cathétomètre.

Précautions à prendre.

Comme dans la première expérience, les tubes doivent être excessivement propres. Ils ont subi le même traitement que dans la première partie, c'est-à-dire qu'ils sont restés plongés longtemps dans l'acide sulfurique, puis qu'ils ont été rincés à l'eau et séchés.

Les tubes capillaires seront mouillés intérieurement, ce qui s'obtient en inclinant le tube A.

*
* *

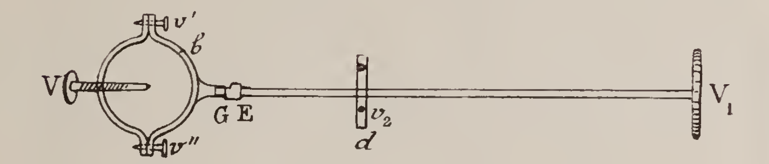
Ce dernier est introduit dans une chambre à air à triple enveloppe. La température est alors suffisamment constante dans la cage centrale. Le bain d'air est muni de fenêtres qui permettent de voir le tube. Il est placé sur une table bien fixe, à une hauteur convenable. En dessous est un brûleur Bunsen placé sur un pied à crémaillère qui permet d'approcher ou d'éloigner le bec à gaz de la chambre à air.

*
* *

Le tube capillaire doit être bien vertical, ce qui n'a cependant pas ici la même importance que dans le premier cas, où la hauteur était lue sur le tube même, qui était gradué ; ici, elle est prise au cathétomètre. Or, la hauteur capillaire dépend de la forme du ménisque; par conséquent, si B est légèrement incliné, il reste sensiblement le même et la hauteur varie très peu de ce chef.

Le gros tube est serré dans une bague en cuivre par une vis de serrage V. En G se trouve un genou. Le tube étant fixé en *b*. on le place dans la chambre centrale. Par trois trous t, t', t'', ménagés à dessein dans les enveloppes, on fait passer une tige en cuivre T que l'on peut visser dans un écrou E qui se trouve

sur l'anneau. Au moyen d'un rayon visuel, on le place à peu près verticalement, puis on s'assure qu'il est parallèle au bord de la colonne du cathétomètre qui, elle, est verticale. Cette position est obtenue par de petits mouvements communiqués au genou, qui est à frottement dur, ou à la vis V_1. Enfin, on fixe la tige T



au moyen d'un disque mobile *d*, lequel présente une excavation qui vient butter contre un rivet *r* placé sur la paroi extérieure du bain d'air. On serre la vis de pression v_2, qui rend le disque immobile ainsi que la tige T.

*
* *

L'appareil étant disposé comme il a été dit, on vise la partie inférieure de la colonne capillaire et on fait la lecture sur l'échelle du cathétomètre; on vise le ménisque et on lit de nouveau. La différence des deux observations donne la hauteur du liquide.

Le cathétomètre que nous avons employé était gradué au millimètre et un vernier donnait le $^1/_{50}$ de millimètre, ce qui permettait d'évaluer les hauteurs capillaires avec une approximation très suffisante.

Voici les résultats que cette expérience nous a donnés pour nos différentes solutions.

Pour plus de facilité et pour pouvoir comparer entre elles nos diverses observations, nous les rapporterons toutes à un tube de $^1/_2$ millimètre de diamètre. Il suffira d'appliquer la loi de Juin, ce qui exige la connaissance du diamètre du tube. Les voici, prises à la machine à diviser :

Numéro de la solution.	Diamètre de la partie supérieure du tube.	Diamètre de la partie inférieure du tube.	Diamètre moyen du tube.
Eau distillée I.	½ millimètre. 0,915 1,095	½ millimètre. 0,990 0,920	½ millimètre. 0,980
II.	1,075 0,950	0,995 0,890	0,980
III.	1,060 0,965	1,100 0,955	1,020
IV.	1,000 0,910	1,050 0,910	0,965
V.	1,100 1,050	1,050 1,050	1,065
VI.	1,050 1,050	1,050 1,050	1,050
Alcool absolu VII.	0,890 1,000	0,930 0,860	0,920

I. EAU DISTILLÉE. — Diamètre du tube : 0,980 de $^1/_2$ mill.

Hauteur de la partie inférieure de la colonne capillaire.	Hauteur du ménisque.	Hauteur capillaire.	Température initiale.	Température finale.	Température moyenne.	Hauteur capillaire rapportée à un tube de $^1/_2$ mill. de diamètre.
Millimètres 552,18	611,48	59,30	28	28,5	28,25	58,1140
552,20	608,26	56,06	63	65	64	54,9388
552,58	605,82	53,24	94	97	95,5	52,1752
553,26	602,38	49,12	124	127	125,5	48,1376
553,80	599,30	45,50	150	150	150	44,5900
554,46	596,0	41,54	169	171	170	40,7092
555,42	593,0	37,58	197	196	196,5	36,8284

II. 20,870 % ALCOOL. — Diamètre du tube : 0,980 de 1/2 mill.

Hauteur de la partie inférieure de la colonne capillaire.	Hauteur du ménisque.	Hauteur capillaire.	Température initiale.	Température finale.	Température moyenne.	Hauteur capillaire rapportée à un tube de 1/2 mill. de diamètre.
Millimètres. 501,68	533,90	32,22	25	25	25	31,5756
501,80	532,62	30,82	56	58	57	30,2036
502,16	531,48	29,32	87	90	88,5	28,7336
502,64	531,48	28,84	116	118	117	28,2632
503,04	530,32	27,28	136	136	136	26,7344
		III. 27.098 % ALCOOL.	Diamètre du tube : 1,020 de 1/2 mill.			
558,42	586,76	28,34	25,5	26	25,25	28,9068
558,74	586,0	27,76	53	56,5	54,75	27,8052
559,50	585,84	26,34	85	87	86	26,8668
560,66	586,14	25,48	115	116	115,50	25,9896
562,16	586,80	24,64	145	148	146,50	25,1328
564,12	587,64	23,52	175	175	175	23,9904
567,0	587,90	20,90	200,5	200,5	200,50	21,3180
		IV. 32.653 % ALCOOL. —	Diamètre du tube : 0,965 de 1/2 mill.			
579,02	606,08	27,06	22	22	22	26,1129
579,70	606	26,30	39	40,5	39,75	25,3795
580,48	605,30	25,12	74	77	75,50	24,2408

581,12	605,46	24,34	102	[illegible]	[illegible]	[illegible]
582,32	605,92	23,60	124	124	124	22,7740
583,94	606,24	22,30	164	166	165	21,5195
585,40	605,94	20,54	193	198	195,50	19,8214
V. 36.497 °/o ALCOOL. — Diamètre du tube : 1.065 de 1/2 mill.						
581,78	605,02	23,24	23	23	23	24,7506
582,36	605,04	22,68	50	52	51	24,1542
583,70	605,36	21,66	83	87	85	23,0679
585,96	606,66	20,70	120	123	121.5	22,0435
588,62	608,34	19,72	150	152	151	21,0018
VI. 50,329 °/o ALCOOL. — Diamètre du tube : 1.050 de 1/2 mill.						
588,80	610,04	21.24	56	61	58,5	22,3020
589,84	610,46	20,62	81	84	82,5	21,6510
592,30	611,68	19,38	120	121	120,5	20,3490
595,28	613	17,72	150	150	150	18,6060
598,08	614,38	16,30	172,5	172,5	172,5	17,1150
VII. ALCOOL ABSOLU. Diamètre du tube : 0.920 de 1/2 mill.						
576,72	600,14	23,42	23	24	23.5	21,5464
577,24	600,12	22.88	47	49	48	21,0496
578,74	599.40	20,66	85	87	86	19,0072
582,42	597,48	15.06	145	149	147	13,8552
585	594,02	9,02	193	196	194,5	8,2984
585,18	593	7.82	199	199	199	7,1944
586,88	591,84	4,96	208	208	208	4.5632

Si nous portons les températures en abscisse et les hauteurs capillaires en ordonnée, nous obtiendrons les diagrammes B (v. tableau).

Les courbes qui correspondent à cette expérience ont été tracées en traits pleins.

Nous en avons rapproché et réduit à la même échelle, celles que nous avons trouvées par le premier procédé (1re partie). Elles sont figurées en pointillé.

Ce qui frappe immédiatement quand on examine les diagrammes B, c'est le changement de courbure donné par les deux procédés différents d'expérimentation. Celui-ci ne peut guère provenir d'une erreur d'observation, car il se reproduit dans toutes nos expériences avec une constance remarquable.

Ce phénomène pourrait peut-être s'expliquer en admettant que la tension superficielle d'un liquide en contact avec l'air ambiant est différente de la tension superficielle d'un liquide en contact avec sa vapeur.

Si nous prolongeons les différentes courbes jusqu'à l'axe des abscisses, nous obtenons pour nos différentes solutions les températures critiques suivantes :

Numéro de la solution.	Température critique.
I Eau distillée.	350°
II	324°
III	319°
IV	315°
V	312°
VI	302°
VII Alcool absolu.	227°

Ces résultats corroborent ceux déjà connus et se rapprochent sensiblement de ceux trouvés par M. le Dr F.-V. Dwelshauvers-Dery (1).

(1) *Note relative à la température critique des mélanges*, 1895, p. 7. (Extrait des Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3e série, t. XXIX, n° 2, 1895.)

III.

Étudions maintenant les variations de la tension superficielle avec la température.

La tension superficielle peut être calculée par la formule :

$$T = \frac{rh\delta}{2} \text{ [1]},$$

où T est la tension superficielle, h la hauteur capillaire, δ la densité.

Recherchons d'abord la densité des différentes solutions employées dans la deuxième partie [2] à différentes températures.

Prenons un tube de petit diamètre, d'une hauteur d'environ 20 centimètres. On scelle la partie inférieure, puis, au moyen d'un long entonnoir très mince, on introduit du mercure B. Au-dessus de B, on place le liquide sur lequel on veut opérer. On verse de nouveau du mercure qui se maintient au-dessus de C grâce au faible diamètre du tube. Enfin, on verse encore du liquide qui se superpose au mercure, et l'on ferme à la lampe la partie supérieure du tube. Nous le plaçons ensuite bien vertical dans la chambre à air dont nous nous sommes déjà servi dans l'expérience précédente. En dessous de la chambre à air se trouve un brûleur Bunsen qui permet de réaliser les températures désirées. Un bec à gaz, placé derrière le bain d'air, éclaire la colonne liquide. Lorsque l'on a atteint la température à laquelle on veut opérer, on règle la flamme de façon à la maintenir constante et l'on mesure la hauteur h au cathétomètre. Celui dont nous disposions donnait le $^1/_{50}$ de millimètre.

La principale difficulté à vaincre est la formation de bulles d'air qui se dégagent même souvent au-

(1) P. De Heen, *La Chaleur*, 1894, p. 121.
(2) Idem, *ibidem*, p. 269.

dessous de 100 degrés, brisent la colonne et la rendent d'une mobilité telle que toute observation devient impossible.

Pour les éviter, le moyen qui nous a le mieux réussi est de prendre une colonne liquide h relativement très grande (6 à 7 centimètres) et de la porter jusqu'à la température limite à laquelle on veut opérer. Il est bien entendu que l'on ne fait aucune observation et qu'on laisse les bulles d'air se former sans s'en préoccuper. On retire alors le tube qui se refroidit et on le frappe légèrement. On parvient assez souvent à faire disparaître les bulles d'air qui se rendent dans la partie supérieure du tube. Mais il est évident que ces chocs successifs ont pour effet de réduire la colonne liquide C; c'est pourquoi il faut la choisir d'abord assez grande. Ce procédé ne réussit d'ailleurs pas toujours. Voici les résultats obtenus :

I. — EAU DISTILLÉE.

Hauteur de la partie supérieure de la colonne inférieure de mercure B.	Hauteur de la partie inférieure de la colonne supérieure de mercure D.	Hauteur de la colonne liquide C.	Température initiale.	Température finale.	Température moyenne.
103,48	126,80	23,32	16	16	16
103,48	127	23,52	38,5	40	39,25
103,70	127,68	23,98	70	75	72,50
103,88	128,42	24,54	109	113	111
103,94	129	25,06	133	135	134
104,06	129,44	25,38	150	151	150,5
Solution II.					
128,50	142,74	14,24	17	17	17
128,80	143,40	14,60	62	64	63
128,84	143,68	14,84	86	86	86
128,92	144,04	15,12	103	104	103,5
129	144,34	15,34	121	120,5	120,75
129,22	144,96	15,74	146,5	146,5	146,50

Solution III.

Hauteur de la partie supérieure de la colonne inférieure de mercure B.	Hauteur de la partie inférieure de la colonne supérieure de mercure D.	Hauteur de la colonne liquide C.	Température initiale.	Température finale.	Température moyenne.
123,72	146,72	23	18	18	18
124,70	145,06	23,36	43	47	45
121,96	145,72	23,76	70	74	72
122,06	146,86	24,80	119	122	120,50
122,24	147,80	25,56	144	148	146

Solution IV.

116,96	152,74	35,78	16	16	16
113,12	150,26	37.14	63	67	65
113 20	150,92	37,72	89	89	89
113,30	151,82	38,52	110	111	110.50
113,96	153,54	39,58	135	135	135
113.98	154,12	40,14	145,50	146	145,75

Solution V.

140,28	157,80	70,52	17	18	17,50

150,76	158,84	8,08	96	96	96
150,84	159.04	8,20	110	111	110,5
151,14	159,60	8,46	136	136	136
151,26	159,90	8,64	154	153	152,5

Solution VI.

121,80	131.20	9,40	19	18	18,5
121,94	131.42	9.48	40	40	40
122,12	132	9,88	74	76	75
122,32	132,48	10,16	105	106	105,5
121,94	132,30	10,36	116	116	116
122,06	132,82	10,76	142,5	142.5	142,5

VII. ALCOOL ABSOLU.

126,16	143,84	17.68	20	20	20
126,30	144,28	17,98	44	45	44,5
126,42	145,08	18,66	74	74	74
126,54	145,88	19,34	100	102	101
126.64	147	20,36	133	134	133,5

Si nous portons les températures en abscisse et les volumes en ordonnée, nous obtiendrons les diagrammes C. Ces courbes sont très continues.

Si nous prenons comme valeur initiale du volume celui du liquide à environ 15°, les volumes aux différentes températures seront (nous en rapprochons les hauteurs capillaires prises sur les diagrammes B qui vont servir à l'instant) :

I. EAU DISTILLÉE.

Températures.	Volumes correspondants.	Hauteurs capillaires correspondantes.
16	1,0000	59
38,75	1,0085	57,26
72,50	1,0283	54,04
111	1,0523	49,90
134	1,0746	46,94
150,50	1,0883	44,50
	Solution II.	
17	1,000	31,56
63	1,025	30,10
86	1,0421	29,30
103,50	1,06179	28,76
120,75	1,0772	28,14
146,50	1,1053	27
	Solution III.	
18	1,0000	29,16
45	1,0156	28,46
72	1,0330	27,74
120,50	1,078	26,10
146	1,1113	25,18

Solution IV.

Températures.	Volumes correspondants.	Hauteurs capillaires correspondantes.
16	1,0000	26,16
65	1,0380	24,90
89	1,0542	24,6
110,50	1,0765	23,38
135	1,1062	22,60
145,75	1,1218	22,22
	Solution V.	
17.5	1,0000	24,82
37,5	1,0159	24,46
96	1,0744	22,80
110,5	1,0904	22,40
136	1,1250	21,62
150	1,1489	21,04
	Solution VI.	
18,5	1,0000	23,24
40	1,0085	22,82
75	1,0510	21,94
105,5	1,0808	20,90
116	1,1021	20,52
142,5	1,1446	19,14
	VII. ALCOOL ABSOLU.	
20	1,000	21,76
44,5	1,016	21,16
74	1,055	19,94
101	1,093	18,32
133,5	1,151	15,50

Au moyen du calcul suivant, les tables de Landolt et Börnstein [1] nous donneront les densités à 15° des solutions employées.

En effet, considérons notre solution II dont le titre est 20,870 %. Les tables nous disent que lorsque le titre est 20 % la densité est 0,97164; lorsqu'il est 21 %, elle est 0,97040. Par conséquent, quand le titre varie de 1 %, la densité varie de 0,00124. Or, il est évident que, pour une variation moindre que 1 %, on peut considérer la densité comme variant proportionnellement au titre. Donc :

Le titre variant de 1 % la densité varie de 0,00124.
— 0,870 % — $0,00124 \times 0,870$
$= 0,00107880.$

La densité de la solution II est donc :

$$0,97164 - 0,00107880 = 0,97056120.$$

En appliquant le même raisonnement aux solutions dont nous nous sommes servi, leur densité à environ 15° sera :

I. — Eau distillée.	Densité : 1.0000000.
Solution II.	— 0,97056120
— III.	— 0,96213496.
— IV.	— 0,95331990.
— V.	— 0,94645558.
— VI.	— 0,91570633.
VII. — Alcool absolu.	— 0,79425000.

Or, les densités sont en raison inverse des volumes;

[1] *Physikalisch-Chemische Tabellen von Landolt und Börnstein*, p. 224.

par conséquent, les densités aux différentes températures seront :

I. EAU DISTILLÉE.

Températures.	Volumes correspondants.	Densités correspondantes
16	1,0000	1,000
38,75	1,0085	0,991
72,50	1,0283	0,972
111	1,0523	0,950
134	1,0746	0,930
150,50	1,0883	0,919
	Solution II.	
17	1,0000	0,971
63	1,0250	0,947
86	1,0421	0,931
103,50	1,06179	0,914
120,75	1,0772	0,902
146,50	1,1053	0,879
	Solution III.	
18	1,0000	0,962
45	1,0156	0,946
72	1,0330	0,931
120,50	1,0780	0,892
146	1,1113	0,865
	Solution IV.	
16	1,0000	0,953
65	1,0380	0,919
89	1,0542	0,904
110,50	1,0765	0,885
135	1,1062	0,862
145,75	1,1218	0,849

Solution V.

Températures.	Volumes correspondants.	Densités correspondantes.
17,50	1,0000	0,947
37,50	1,0159	0,933
96	1,0744	0,882
110,50	1,0904	0,869
136	1,1250	0,841
152	1,1489	0,824
	Solution VI.	
18,50	1,0000	0,916
49	1,0085	0,908
75	1,0510	0,872
105,50	1,0808	0,847
116	1,1021	0,831
142,50	1,1446	0,800
	VII. ALCOOL ABSOLU.	
20	1,0000	0,794
44,50	1,016	0,781
74	1,055	0,752
101	1,093	0,726
133,50	1,151	0,689

Nous connaissons donc maintenant les diamètres des tubes capillaires sur lesquels nous avons opéré, les hauteurs capillaires et les densités pour certaines températures déterminées. Il suffit de remplacer ces diverses quantités par leur valeur dans la formule

$$T = \frac{rh\delta}{2}$$

pour avoir la tension superficielle correspondante. Tout calcul fait, nous trouverons pour les valeurs des tensions superficielles les résultats suivants :

TEMPÉRATURES.	TENSIONS superficielles.	TEMPÉRATURES.	TENSIONS superficielles.
I. EAU DISTILLÉE.		**Solution V.**	
16	7,375	17,50	2.938
38,75	7,093	37,50	2,852
72,50	6,565	96	2.513
111	5,925	110.50	2,433
134	5,456	136	2,272
150,50	5,111	152	2,167
Solution II.		**Solution VI.**	
17	3,830	18,50	2,660
63	3,563	40	2,590
86	3,409	75	2,391
103,50	3,285	105,50	2,212
120,75	3,172	116	2,131
146,50	2,966	142,50	1.914
Solution III.		**VII. ALCOOL ABSOLU.**	
18	3,506	20	2,159
45	3,365	44,50	2,065
72	3,228	74	1,874
120,50	2,910	101	1,662
146	2,722	133,50	1,334
Solution IV.			
16	3,116		
65	2,860		
89	2,748		
110.50	2,586		
135	2,435		
145,75	2,358		

Portons les températures en abscisse, les tensions superficielles en ordonnée, nous obtiendrons les diagrammes D (v. tableau). Ces courbes sont très continues, d'autant plus que l'échelle à laquelle elles sont construites est relativement grande et que la tension est la résultante de trois expériences bien distinctes : le calibrage des tubes, l'observation de la hauteur capillaire et, enfin, celle de la dilatation. Par conséquent, les erreurs d'observation se multiplient et pourraient devenir sensibles.

Remarquons qu'à la température critique, la tension superficielle est nulle. (Il suffit de faire $h = 0$ dans la formule.) Si nous prolongeons les courbes obtenues jusqu'à l'axe des abscisses, nous trouvons des températures critiques qui coïncident parfaitement avec celles obtenues dans la deuxième partie.

SUR

UNE DÉMONSTRATION SIMPLE

DE LA FORMULE DE FRESNEL

PAR

G. CESÀRO

SUR

UNE DÉMONSTRATION SIMPLE

DE LA FORMULE DE FRESNEL

Cette formule se démontre habituellement par l'emploi de la surface des vitesses normales (*), ou bien est obtenue par la recherche d'un maximum. Il y a longtemps que, cherchant à obtenir une démonstration simple d'un énoncé si simple, j'ai publié une démonstration de ce théorème dans le *Bulletin de la Société minéralogique de France*, démonstration qui ne me satisfaisait pas encore; celle que je communique aujourd'hui à la société est, pour ainsi dire, immédiate.

La formule de Fresnel peut se résumer dans l'énoncé suivant :

Théorème. — *Si un plan, passant par le centre d'un ellipsoïde, fait des angles* θ *et* θ' *avec ses plans cycliques, si, en outre,* $\frac{1}{r'}, \frac{1}{r''}$ *sont les demi-axes de l'ellipse déterminée dans l'ellipsoïde par le plan dont il s'agit, on a*

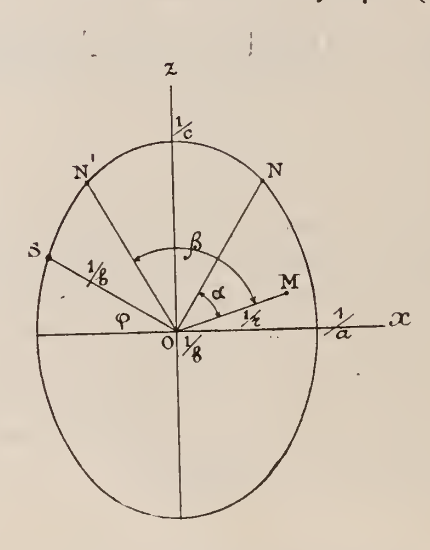
$$\frac{r'^2 - r''^2}{\sin\theta \sin\theta'} = \text{const.}$$

(*) Lieu des points obtenus en portant sur la normale, menée au plan d'une section diamétrale quelconque par le centre de l'ellipsoïde, et en partant de ce point, des longueurs égales aux inverses des demi-axes de cette section.

Soient $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ les demi-axes de l'ellipsoïde et supposons

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}.$$

Déterminons un point quelconque M de la surface par son rayon vecteur $\frac{1}{r}$ et par les angles α, β que ce rayon fait avec les droites ON, ON′ normales aux sections cycliques (fig. 1).



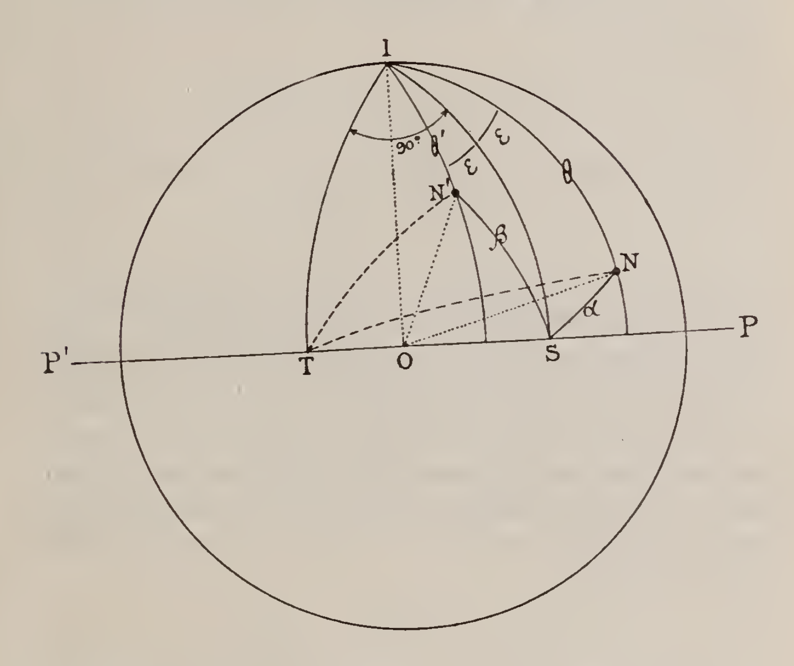
En fonction de ces coordonnées, l'équation de l'ellipsoïde est (*)

$$r^2 = b^2 - (a^2 - c^2)\cos\alpha\cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Soit (fig. 2) PP′ le plan considéré et I le point où la normale à ce plan perce la sphère décrite du centre O avec un rayon égal à l'unité; soient ON et ON′ les normales aux sections cycliques; IN et IN′ mesurent les angles que le plan P fait avec ces sections.

(*) Voir la note placée à la fin.

Pour avoir les directions des axes de l'ellipse découpée par le plan P dans l'ellipsoïde, on sait qu'il suffit de projeter ON et ON′ sur P, puis de tracer les bissectrices des angles formés par les projections obtenues. Comme ION, ION′ sont les plans qui



projettent ON et ON′ sur P, en traçant l'arc IS bissecteur de l'angle N′IN, on aura en OS la direction de l'un des axes, $\frac{1}{r''}$ par exemple.

Si nous appliquons à l'extrémité de cet axe l'équation (1), en observant que les triangles SNI, SN′I, nous donnent, pour ce point :

$$\cos \alpha = \sin \theta \cos \varepsilon$$

$$\cos \beta = \sin \theta' \cos \varepsilon,$$

nous obtenons :

$$r''^2 = b^2 - (a^2 - c^2) \sin \theta \sin \theta' \cos^2 \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

En faisant $\widehat{SIT} = 90°$, on aura en OT la direction du second

axe $\frac{1}{r'}$. Pour l'extrémité de cet axe, les triangles TIN, TIN' donnent :

$$\cos\alpha = \sin\theta\cos(90^\circ + \varepsilon) = -\sin\theta\sin\varepsilon$$

$$\cos\beta = \sin\theta'\cos(90^\circ - \varepsilon) = \quad \sin\theta'\sin\varepsilon;$$

par conséquent

$$r'^2 = b^2 + (a^2 - c^2)\sin\theta\sin\theta'\sin^2\varepsilon \quad . \quad . \quad \quad . \quad (3)$$

En soustrayant (2) de (3), on obtient la relation demandée

$$r'^2 - r''^2 = (a^2 - c^2)\sin\theta\sin\theta' . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Corollaire. — *Le grand axe de l'ellipse, découpée par un plan diamétral* P *dans l'ellipsoïde, se trouve dans celui des angles dièdres, formés par les plans qui projettent sur* P *les normales aux sections cycliques, qui contient le grand axe* $\frac{1}{c}$ *de la surface.*

En effet, les angles α et β ont été comptés à partir du grand axe $\frac{1}{c}$ de la surface, et l'axe de l'ellipse découpée qui se trouve dans les conditions énoncées ci-dessus est $\frac{1}{r''}$ (fig. 2). Or, des formules (2) et (3), comme $\sin\theta$ et $\sin\theta'$ sont essentiellement positifs, on déduit

$$\frac{1}{r'} > \frac{1}{r}.$$

Observation. — La même marche peut servir à résoudre rapidement la question suivante :

Problème. — *Étant donné les angles* θ *et* θ' *que fait un plan diamétral* P *avec les plans cycliques d'un ellipsoïde, calculer les axes* $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{r''}$ *de l'ellipse découpée.*

Si l'on désigne par $\frac{1}{r}$ le rayon normal à P, on a

$$r^2 = b^2 - (a^2 - c^2)\cos\theta\cos\theta'.$$

Les directions $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{r''}$ étant perpendiculaires deux à deux, on a

$$r^2 + r'^2 + r''^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

et, par conséquent,

$$r'^2 + r''^2 = a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\cos\theta\cos\theta' \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Les équations (4) et (5) donnent

$$r'^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2}\cos(\theta - \theta')$$

$$r''^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2}\cos(\theta + \theta').$$

Note. — *Équation polaire de l'ellipsoïde rapporté aux normales à ses sections cycliques prises comme axes coordonnés.*

a) L'équation (1) peut s'obtenir simplement, par transformation de coordonnées, en dirigeant les calculs comme il suit :

Désignons par 2φ l'angle NON' (fig. 1), par x, y, z les coordonnées du point M. Les cosinus directeurs de OM sont : rx, ry, rz; ceux de ON : $\sin\varphi$, 0, $\cos\varphi$; ceux de ON' : $-\sin\varphi$, 0, $\cos\varphi$; de sorte que

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= rx\sin\varphi + rz\cos\varphi \\ \cos\beta &= -rx\sin\varphi + rz\cos\varphi\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Or :

$$r^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

et

$$r^2 - b^2 = r^2\left\{(a^2 - b^2)x^2 - (b^2 - c^2)z^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

En appliquant cette équation au point S de la section cyclique, on obtient

$$0 = (a^2 - b^2)\cos^2\varphi - (b^2 - c^2)\sin^2\varphi,$$

puis

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad \cos^2\varphi = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

L'équation (7) peut donc s'écrire

$$\frac{r^2 - b^2}{a^2 - c^2} = r^2x^2 \sin^2\varphi - r^2z^2 \cos^2\varphi,$$

ou, à cause de (6),

$$r^2 - b^2 = -(a^2 - c^2) \cos\alpha \cos\beta.$$

b) Voici une seconde méthode :

Dans le système polaire adopté, les équations

$$r^2 - b^2 = 0$$

$$\cos\alpha = 0$$

$$\cos\beta = 0,$$

représentent respectivement une sphère de rayon $\frac{1}{b}$, ayant pour centre l'origine, et les plans cycliques; de sorte que l'équation

$$r^2 - b^2 + k \cos\alpha \cos\beta = 0$$

représente une surface passant par l'intersection de la sphère de rayon $\frac{1}{b}$ et des plans cycliques.

On verra facilement que cette surface est du second degré et qu'elle a pour axes les bissectrices des axes coordonnés ON, ON' et la perpendiculaire à leur plan.

Pour l'approprier à l'ellipsoïde, il suffit d'écrire, par exemple, que les extrémités des axes $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{a}$ vérifient l'équation; on obtient

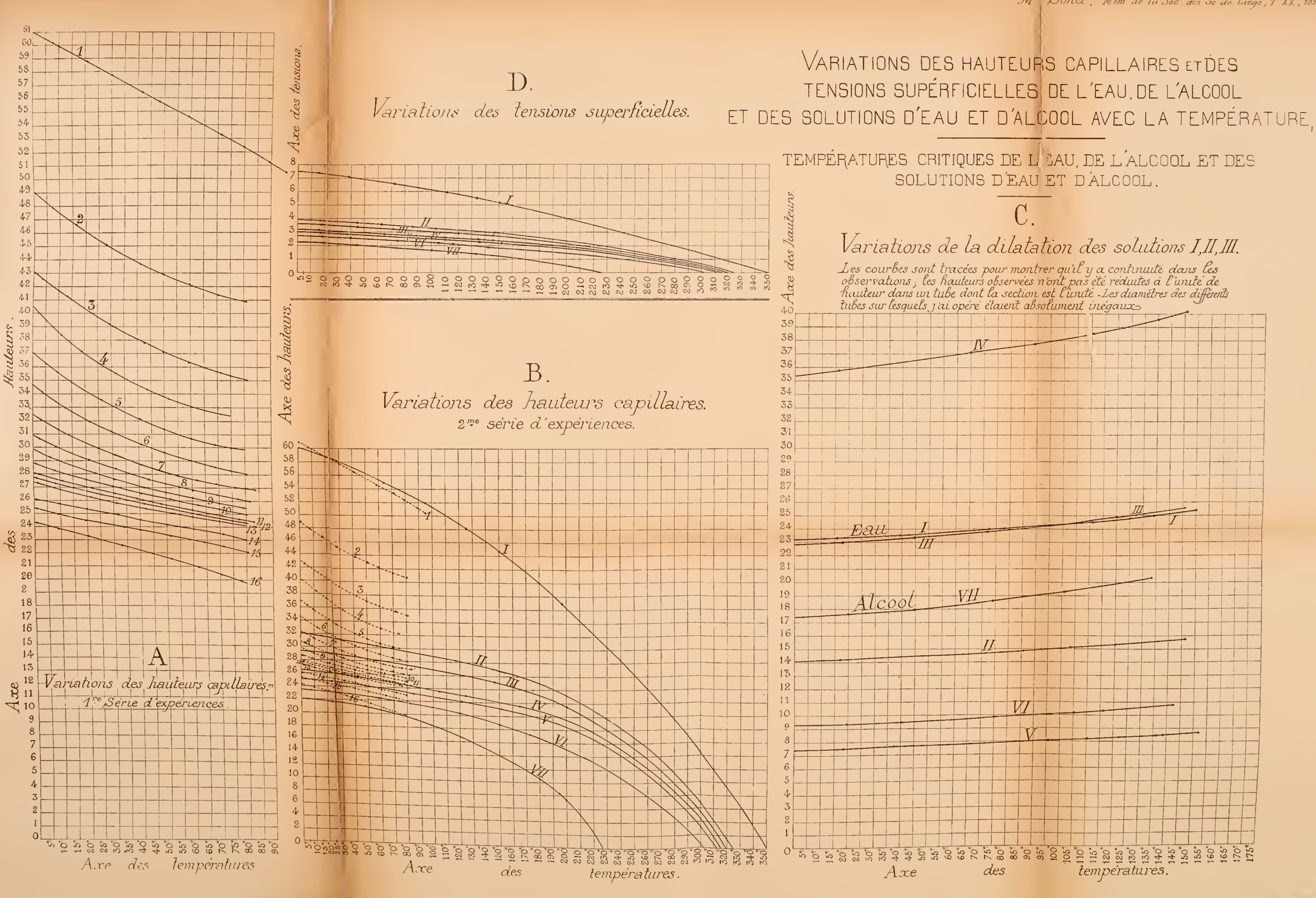
$$c^2 - b^2 + k \cos^2\varphi = 0$$

$$a^2 - b^2 - k \sin^2\varphi = 0;$$

d'où :

$$k = a^2 - c^2.$$

Donc, etc.



Mr Sohel, Mém. de la Soc. des Sc. de Liège, T. XX, 1897
VARIATIONS DES HAUTEURS CAPILLAIRES ET DES TENSIONS SUPÉRFICIELLES DE L'EAU, DE L'ALCOOL ET DES SOLUTIONS D'EAU ET D'ALCOOL AVEC LA TEMPÉRATURE,
TEMPÉRATURES CRITIQUES DE L'EAU, DE L'ALCOOL ET DES SOLUTIONS D'EAU ET D'ALCOOL.
D.
Variations des tensions superficielles.
Axe des tensions.
B.
Variations des hauteurs capillaires.
2me série d'expériences.
Axe des hauteurs.
Axe des températures.
A
Variations des hauteurs capillaires.
1re Série d'expériences.
Axe des Hauteurs.
Axe des températures
C.
Variations de la dilatation des solutions I, II, III.
Les courbes sont tracées pour montrer qu'il y a continuité dans les observations; les hauteurs observées n'ont pas été réduites à l'unité de hauteur dans un tube dont la section est l'unité - Les diamètres des différents tubes sur lesquels j'ai opéré étaient absolument inégaux.
Axe des hauteurs.
Eau
Alcool
Axe des températures.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 1ER ORDRE

PAR

Étienne DELASSUS

DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION

La théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre est actuellement arrivée à un grand degré de perfection. Elle a déjà été exposée bien des fois, et M. Goursat, dans un livre (*) devenu classique, a traité la question d'une façon à peu près complète.

Mais, telle qu'elle a été présentée jusqu'ici, cette théorie manque d'unité. Les différentes parties qui la constituent restent presque indépendantes les unes des autres et résultent chacune de propriétés particulières.

Ainsi, l'intégration des systèmes linéaires repose sur une extension partielle du théorème de Cauchy, puis, quand on arrive aux systèmes non linéaires, il faut distinguer deux cas, suivant que l'inconnue figure ou non dans les équations, car, dans ces deux cas, les systèmes en *involution* n'ont pas la même forme. La méthode de Jacobi et Mayer exige cette distinction, car elle subit des modifications considérables quand on passe de l'un à l'autre cas, et repose sur les propriétés algébriques des expressions [,] et (,). Quant à la méthode de Lie, elle n'est démontrée que pour les systèmes où l'inconnue ne figure pas, et est la conséquence d'un théorème qui résulte de la théorie des caractéristiques ou d'une méthode d'intégration de Jacobi.

(*) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. Hermann, Paris, 1891.

Au fond, cela tient à l'absence, au début, d'une *forme canonique* absolument générale et d'un théorème d'existence. Il en existe bien un dans le cas des systèmes ne contenant pas l'inconnue, c'est celui sur lequel repose la méthode de Lie et pour lequel M. Goursat a esquissé une démonstration directe; mais, dans le cas général, ce théorème d'existence n'a pu être démontré que par Lie, en partant de la méthode d'intégration par les caractéristiques.

Il y a là un fait assez peu naturel : ce sont les méthodes d'intégration qui donnent le théorème général d'existence, tandis qu'en réalité on devrait être conduit à ces méthodes d'intégration par ce théorème qui devrait être établi tout au début. C'est cette marche que je vais suivre dans ce mémoire.

Dans un mémoire (*), je me suis occupé des systèmes différentiels les plus généraux, et je suis arrivé à trouver une forme canonique absolument générale, sur laquelle j'ai pu établir un théorème d'existence généralisant complètement celui de Cauchy et déterminant d'une façon précise le nombre et la nature des constantes et fonctions arbitraires, en nombre fini, dont dépendent les intégrales. Dans un autre mémoire (**), j'ai indiqué comment cette théorie générale permettrait de simplifier celle des systèmes du premier ordre, et c'est le développement complet de cette application qui constitue le mémoire actuel.

Les théorèmes fondamentaux que j'avais jusqu'à présent

(*) E. Delassus, *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles.* (Annales de l'École normale, 1896.)

(**) E. Delassus, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue.* (Annales de l'École normale, 1897.)

Id., *Sur les transformations des systèmes différentiels.* (C. R. de l'Acad. des sciences de Paris, 28 décembre 1896.)

considérés comme cas particuliers de théorèmes relatifs aux systèmes différentiels les plus généraux, sont ici démontrés directement de façon que la théorie des systèmes du premier ordre se développe d'une façon indépendante.

Le point de départ est la réduction des systèmes à la *forme canonique*. Cette forme est absolument générale; dans le cas des systèmes où l'inconnue ne figure pas, elle coïncide avec la forme en *involution*, mais il n'en est plus de même quand l'inconnue figure explicitement.

C'est sur cette forme canonique que j'établis le théorème fondamental d'existence que, pour abréger, j'appelle *théorème de Cauchy généralisé*, et la démonstration que j'en donne fournit immédiatement le théorème suivant, qui joue un rôle capital dans toute la théorie :

L'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et à une seule inconnue peut toujours se ramener à celle d'une seule équation du premier ordre.

Théorème qui était déjà connu dans le cas des systèmes où l'inconnue ne figure pas; il avait été démontré par Lie au moyen de la théorie générale des caractéristiques, puis, par Mayer, en se servant d'une méthode d'intégration de Jacobi.

Au moyen du théorème de Cauchy généralisé, on arrive à définir le « problème de Cauchy » relatif à un système quelconque du premier ordre, ce qui donne à l'intégration un sens très précis. On peut dire que l'on a effectué complètement cette intégration quand on sait traiter effectivement ce problème de Cauchy.

On en déduit aussi l'étude des intégrales singulières et l'on est amené à ranger de telles intégrales en plusieurs catégories, suivant qu'elles sont *simplement, doublement,... singulières*.

Enfin, il me permet d'étudier d'une façon précise la transfor-

mation qui change un système où l'inconnue figure en un autre où l'inconnue ne figure pas, transformation que l'on applique souvent aux systèmes d'équations simultanées sans savoir, au juste, ce qu'elle donne dans ce cas.

Le théorème sur la réduction à une seule équation fournit immédiatement une méthode d'intégration des systèmes linéaires, et cette méthode est précisément la plus simple que l'on connaisse : c'est celle de Mayer.

Pour l'intégration des systèmes non linéaires, je suis obligé d'exposer la théorie de l'intégrale complète à la façon ordinaire. J'y ajoute la solution du problème de Cauchy au moyen d'une telle intégrale et sans passer par les considérations géométriques relatives aux caractéristiques.

Je puis alors exposer la méthode de Jacobi et Mayer, sans utiliser aucune propriété algébrique des expressions [,] et sans faire la moindre distinction entre le cas où l'inconnue figure et celui où elle ne figure pas. Il y a simplement à remarquer que dans le dernier de ces deux cas, il y a forcément des simplifications qui se produisent. En outre, je montre que la méthode conduit toujours à une *véritable intégrale complète*.

Enfin, en dernier lieu, j'expose la méthode de Lie, toujours sans faire de distinction entre les deux cas. Cette méthode est une conséquence immédiate de la réduction d'un système à une seule équation.

Je me suis borné à ces deux méthodes, parce qu'elles sont les plus parfaites et que ce sont les seules auxquelles la marche que j'ai suivie apporte des modifications sensibles.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 1er ORDRE

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Équations linéaires et homogènes.

1. *Intégration.* — On sait que l'intégration de l'équation

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P_1 p_1 + P_2 p_2 \cdots + P_m p_m = 0$$

est équivalente à celle du système d'équations différentielles ordinaires

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_m}{P_m}.$$

Si

$$\Phi_1(x_1 \dots x_m) = c^{te},$$
$$\Phi_1(x_1 \dots x_m) = c^{te},$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\Phi_{m-1}(x_1 \dots x_m) = c^{te}$$

est l'intégrale générale de (2), Φ_1, Φ_2, ..., Φ_{m-1} sont $m - 1$ inté-

grales particulières et distinctes de (1), et toute intégrale de (1) est de la forme

$$F(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1}).$$

Et réciproquement, en égalant à des constantes arbitraires $m - 1$ intégrales distinctes de l'équation (1), on obtient l'intégrale générale du système (2).

2. *Réduction de l'intégration quand on connaît des intégrales particulières.* — Supposons qu'on connaisse μ intégrales particulières de (1). Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu$, ces intégrales supposées *distinctes*. Nous pouvons toujours leur associer $m - p$ autres fonctions $f_{\mu+1}, \ldots, f_m$, telles que

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu, f_{\mu+1}, \ldots, f_m,$$

forment un système de m fonctions distinctes. On pourra faire le changement de variables

$$\Phi_1 = x'_1, \ldots, \Phi_\mu = x'_\mu, f_{\mu+1} = x'_{p+1}, \ldots, f_m = x'_m.$$

On obtiendra une nouvelle équation linéaire qui devra admettre comme solutions particulières

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_\mu.$$

Elle sera donc de la forme

$$P'_{\mu+1} p'_{\mu+1} + \cdots + P'_m p'_m = 0;$$

comme elle ne contient pas les dérivés de l'inconnue z par rapport aux variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\mu$, on pourra y considérer ces variables comme des constantes, et l'on sera ramené à intégrer le système

$$\frac{dx'_{\mu+1}}{P'_{\mu+1}} = \frac{dx'_{\mu+2}}{P'_{\mu+2}} = \cdots = \frac{dx'_m}{P'_m},$$

qui ne contient plus que $m - \mu - 1$ équations.

Cette réduction de l'équation (1) peut être considérée aussi comme une réduction du système équivalent (2).

Si l'on connait p intégrales du système (2), la recherche des $m-p-1$ autres intégrales se ramène à l'intégration d'un nouveau système qui n'a plus que $m-\mu-1$ équations.

3. *Recherche de l'intégrale ayant une fonction initiale donnée.* — Supposons qu'en $M_0\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ les coefficients P soient analytiques et que P_1 ne soit pas nul. Le théorème de Cauchy démontre l'existence d'une intégrale analytique en M_0 et se réduisant, pour $x_1 = x_1^0$, à une fonction

$$\theta(x_2, \ldots, x_m)$$

analytique en $x_2^0, \ldots, x_m^0$, et donnée à l'avance. Soit Θ cette intégrale que nous nous proposons de chercher.

Supposons qu'on ait trouvé l'intégrale générale

$$\Phi_1 = c^{te},\ \Phi_2 = c^{te},\ \ldots,\ \Phi_{m-1} = c^{te}$$

du système (2), et désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}$ les valeurs initiales (en x_1^0) des fonctions Φ.

Les fonctions φ sont *distinctes*; en effet, s'il existait entre elles une relation

$$\varphi_i = \Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}),$$

la fonction

$$\Psi(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m-1})$$

serait une intégrale de (1) qui, en x_1^0, se réduirait à φ_i; ce serait donc Φ_i, de sorte que l'on aurait

$$\Phi_i = \Psi(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m-1}),$$

ce qui ne peut exister puisque les fonctions Φ sont supposées distinctes.

On aura

$$\Theta = F(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m-1}),$$

F étant une fonction inconnue qu'il faut déterminer de façon que l'on ait identiquement

$$(4) \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \theta = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}).$$

Les fonctions φ étant distinctes, nous pouvons faire le changement de variables

$$x'_2 = \varphi_1, x'_3 = \varphi_2, \ldots, x'_m = \varphi_{m-1},$$

d'où nous tirerons

$$x_2 = \varphi'_1, x_3 = \varphi'_2, \ldots, x_m = \varphi'_{m-1}.$$

Au moyen de ces nouvelles variables, l'identité (4) devient

$$\theta(\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_{m-1}) = F(x'_2, x'_3, \ldots, x'_m)$$

et F se trouve ainsi parfaitement déterminée.

En particulier, cherchons les intégrales $\Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_m$, qui correspondent aux fonctions initiales $x_2, x_3, \ldots, x_m$; ce qui précède montre que l'on aura

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \varphi'_1(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m-1}), \\ \Theta_3 &= \varphi'_2(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta_m &= \varphi'_{m-1}(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m-1}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les fonctions Θ s'obtiendront en résolvant le système d'équations

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1(x_1^0, \Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_m), \\ \Phi_2 &= \Phi_2(x_1^0, \Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{m-1} &= \Phi_{m-1}(x_1^0, \Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_m). \end{aligned} \right.$$

Les fonctions $\Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_m$ étant ainsi trouvées, l'intégrale Θ sera visiblement

$$\Theta = \theta(\Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_m).$$

4. *Cas particulier.* — Nous rencontrerons très souvent des équations de la forme

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad p_1 + P_{\mu+1} p_{\mu+1} + \cdots + P_m p_m = 0.$$

On les intègre en considérant $x_2, \ldots, x_\mu$ comme des constantes, ce qui donne le système

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx_1}{1} = \frac{dx_{\mu+1}}{P_{\mu+1}} = \cdots = \frac{dx_m}{P_m}.$$

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m-\mu}$ les intégrales distinctes de (7); l'équation (6) admet les $m - 1$ intégrales distinctes

$$x_2, x_3, \ldots, x_\mu, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m-\mu}.$$

Les fonctions $\Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_\mu$ seront ici $x_2, x_3, \ldots, x_\mu$, et les autres seront obtenues en résolvant les équations

$$(8) \quad \ldots \quad \begin{cases} \Phi_1 = \Phi_1(x_1^0, x_2, \ldots, x_\mu, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m), \\ \Phi_2 = \Phi_2(x_1^0, x_2, \ldots, x_\mu, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{\mu} = \Phi_{m-\mu}(x_1^0, x_2, \ldots, x_\mu, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m); \end{cases}$$

l'intégrale Θ ayant pour fonction initiale θ sera ici

$$\Theta = \theta(x_2, \ldots, x_\mu, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m),$$

et, en particulier,

$$F(\Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m)$$

sera l'expression générale des intégrales de (6) qui correspondent à des fonctions initiales indépendantes de $x_2, x_3, \ldots, x_\mu$.

Équations linéaires quelconques.

5. *Intégration.* — Pour intégrer l'équation linéaire

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_m p_m = P_0,$$

on considère l'équation linéaire et homogène à $m + 1$ variables

$$(10) \quad \ldots \quad P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots + P_m \frac{\partial V}{\partial x_m} + P_0 \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

qui s'intègre par le système

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_m}{P_m} = \frac{dz}{P_0}.$$

Si l'on met de côté une intégrale singulière fournie par les équations simultanées

$$P_1 = 0, \ P_2 = 0, \ldots, \ P_m = 0$$

et qui n'existe que si ces équations en z ont une solution commune, toute intégrale de (9) s'obtiendra en égalant à 0 une intégrale de (10) et résolvant cette équation par rapport à z.

6. *Recherche de l'intégrale ayant une fonction initiale donnée.* — Proposons-nous de chercher l'intégrale $T(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ qui, pour $x_1 = x_1^0$, se réduit à la fonction donnée à l'avance $t(x_2, \ldots, x_m)$.

En opérant comme dans le § 3, nous chercherons les intégrales de (10) qui se réduisent respectivement à

$$z, \ x_2, \ x_3, \ \ldots, \ x_m,$$

pour $x_1 = x_1^0$. Soient $\Theta_0, \Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_m$ ces intégrales.

On obtiendra évidemment T en résolvant l'équation

$$(12) \ \Theta_0(x_1, x_2, x_m, T) = t[\Theta_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, T), \ldots, \Theta_m(x_1, x_2, \ldots, x_m, T)].$$

Car en faisant $x_1 = x_1^0$, cette équation se réduit à

$$T = t(x_2, \ldots, x_m).$$

7. *Cas particulier.* — Nous rencontrerons constamment des équations de la forme

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p_1 + P_{\mu+1}p_{\mu+1} + P_m p_m = P_0.$$

L'équation linéaire et homogène correspondante est ici

$$(14) \quad . \quad . \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_{\mu+1}\frac{\partial V}{\partial x_{\mu+1}} + \cdots + P_m\frac{\partial V}{\partial x_m} + P_0\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Elle est de la forme de celles qui ont été considérées dans le § 4. Elle s'intégrera par le système

$$(15) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dx_1}{1} = \frac{dx_{\mu+1}}{P_{\mu+1}} = \cdots = \frac{dx_m}{P_m} = \frac{dz}{P_0},$$

qui n'a plus que $m - \mu + 1$ équations.

Les intégrales particulières $\Theta_2, \ldots, \Theta_\mu$ sont ici $x_2, \ldots, x_\mu$.

On déduira les $\Theta_0, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m$ des $m - \mu + 1$ intégrales de (15) comme il a été indiqué au § 4, et l'intégrale T ayant pour fonction initiale t, sera donnée par l'équation

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \Theta_0(x_1, x_2, \ldots, x_m, T) \\ = t[x_2, \ldots, x_\mu, \Theta_{\mu+1}(x_1, x_2, \ldots, x_m, T), \ldots, \Theta_m(x_1, x_2, \ldots, x_m, T)]. \end{array} \right.$$

En particulier, l'équation

$$\Theta_0 = F(\Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m),$$

où F est arbitraire, fournira l'expression générale des intégrales qui correspondent à des fonctions initiales indépendantes de $x_2, \ldots, x_\mu$.

8. *Ordres d'opérations* — Nous verrons plus tard que l'intégration des équations quelconques du premier ordre se ramène toujours à l'intégration de systèmes d'équations différentielles ordinaires et à la résolution d'équations finies.

Bien qu'on ne sache pas toujours effectuer ces résolutions, on les considère comme des opérations dont l'ordre de difficulté est négligeable quand on le compare à celui d'une intégration quelconque. C'est pour cela que l'on considère une intégration comme terminée quand elle est ramenée à la résolution d'équations finies.

Dans ces conditions, on peut dire que toute la difficulté de l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre réside dans la recherche des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires auxquels il conduit. En outre, la recherche d'une intégrale d'un tel système

d'équations différentielles ordinaires du premier ordre est d'autant plus difficile qu'il est composé d'un plus grand nombre d'équations, et chaque intégrale trouvée diminue d'une unité le nombre des équations analogues qui détermineront les autres intégrales.

On est ainsi conduit, pour avoir une idée de l'ordre de difficulté d'une intégration, à prendre pour base l'*opération d'ordre* n définie comme étant *la recherche d'une intégrale d'un système de* n *équations différentielles ordinaires de premier ordre.*

La recherche de p intégrales du système de n équations différentielles exigera par conséquent des opérations successives d'ordres

$$n, n - 1, \ldots, n - p + 1.$$

L'intégration complète exigerait les opérations d'ordres

$$n, n - 1, \ldots, 3, 2, 1.$$

Ainsi, les opérations successives que nécessite l'intégration des équations (1), (6), (9), (13) sont d'ordres :

Pour l'équation (1) :

$$m - 1, m - 2, \ldots, 3, 2, 1.$$

Pour l'équation (6) :

$$m - \mu, m - \mu - 1, \ldots, 3, 2, 1.$$

Pour l'équation (9) :

$$m, m - 1, \ldots, 3, 2, 1,$$

et enfin pour l'équation (13) :

$$m - \mu + 1, m - \mu, \ldots, 3, 2, 1.$$

CHAPITRE II.

FORME CANONIQUE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE A UNE INCONNUE.

9. *Définition des expressions* [F, Φ]. — Soient

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, p_2, \ldots, p_m),$$
$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

deux fonctions des variables x de l'inconnue z et de ses dérivées partielles. Nous poserons

$$\frac{dF}{dx_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{d\Phi}{dx_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

et

$$[F, \Phi] = \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{d\Phi}{dx_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dF}{dx_i} \right).$$

Ces expressions [F, Φ] possèdent des propriétés remarquables, mais, comme nous ne les utiliserons pas, nous nous bornerons à considérer le symbole [F, Φ] comme une notation commode et simple pour représenter et se rappeler certaines quantités qui interviendront constamment dans ce qui va suivre.

Quand F et Φ ne contiennent pas z, les $\frac{d}{dx_i}$ se réduisent aux $\frac{\partial}{\partial x_i}$, l'expression [F, Φ] se réduit alors à

$$\sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)$$

et on la représente par (F, Φ).

10. *Forme canonique.* — Soit

$$(1) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, p_2, \ldots, p_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, p_2, \ldots, p_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, p_2, \ldots, p_m) = 0 \end{array} \right.$$

un système d'équations simultanées du premier ordre à l'inconnue z.

Cherchons à le résoudre par rapport au plus grand nombre possible de dérivées et examinons les différents cas qui peuvent se présenter.

Il peut arriver que l'on soit ainsi conduit à un résidu d'équations ne contenant plus les dérivées et ne se réduisant pas à des identités.

Si parmi ces équations il y en a qui ne contiennent pas z, le système (1) est évidemment *incompatible.*

Supposons qu'elles contiennent toutes z. Considérons-les comme des équations en z; elles devront être vérifiées par toute intégrale de (1), de sorte que si elles n'ont pas de solution commune, le système (1) sera encore *incompatible.* Si elles ont une solution commune, ce sera la seule intégrale possible du système (1), on la portera dans les équations (1); si elle ne les vérifie pas toutes identiquement, il y aura encore *incompatibilité,* et enfin, si elle les vérifie toutes identiquement, ce sera la seule intégrale du système (1) qui se trouvera ainsi intégré par des résolutions d'équations finies.

En dernier lieu, il y a le cas où le résidu d'équations ne contenant pas les p n'existe pas, c'est-à-dire où le système (1) est résoluble par rapport à un certain nombre de dérivées. Donc :

Théorème. — *Étant donné un système d'équations du premier ordre, on peut toujours, par des résolutions d'équations finies, constater son incompatibilité, ou l'intégrer ou le mettre sous la forme*

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m) = 0, \\ p_2 - f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_\mu - f_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m) = 0. \end{array} \right.$$

Le problème de l'intégration ne subsistant que pour les systèmes de la forme (2), nous ne nous occuperons plus maintenant que de tels systèmes.

Nous ferons remarquer, en outre, que la résolution du système (1) peut fournir quelquefois des équations qui se décom-

posent en facteurs analytiquement distincts; le système proposé se décomposera alors en plusieurs systèmes partiels, certains pouvant être incompatibles, certains pouvant s'intégrer algébriquement et les autres se mettant sous la forme (2).

11. Partons donc du système (2).

Parmi les dérivées de tous les ordres de z, établissons une distinction en en faisant deux groupes D et Δ, le premier étant formé par toutes les dérivées de z qui sont en même temps des dérivées de l'une des dérivées du premier ordre $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$.

Pour qu'une dérivée

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

soit une dérivée D, il faut et il suffit que l'un au moins des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ ne soit pas nul ou, puisque tous ces nombres sont positifs, que l'on ait

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu \pm 0.$$

Quant aux dérivées Δ, ce seront les dérivées de la forme

$$\frac{\partial^{\alpha_{\mu+1}+\ldots+\alpha_m} z}{\partial x_{\mu+1}^{\alpha_{\mu+1}} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Considérons les équations du second ordre obtenues en dérivant toutes les équations (2) par rapport à toutes les variables.

En dérivant d'abord par rapport aux variables $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$, on aura immédiatement en fonction des x, des z, des p et des dérivées Δ du second ordre, les dérivées D du second ordre de la forme $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_{\mu+k}}$, $(i \leqslant \mu)$, et chacune d'elles ne sera obtenue qu'une seule fois.

$$(3) \quad . \quad . \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_{\mu+k}} = \frac{df_i}{dx_{\mu+k}} + \sum_{l=1}^{l=m-\mu} \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+l}} \frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+l} \partial x_{\mu+k}}.$$

Si maintenant nous dérivons les équations (2) par rapport

aux variables $x_1, \ldots, x_\mu$, nous obtenons des équations résolues par rapport aux dérivées D de la forme $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i \leqslant \mu, j \leqslant \mu)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{df_i}{dx_j} + \sum_{l=1}^{l=m-\mu} \frac{\partial f_i}{dp_{\mu+l}} \frac{\partial^2 z}{\partial x_j dx_{\mu+l}};$$

les dérivées du second ordre qui figurent dans le second membre sont précisément celles que nous avions déjà calculées.

En les remplaçant au moyen de la relation (3), nous arrivons à l'expression

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{df_i}{dx_j} + \sum_{l=1}^{l=m-\mu} \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+l}} \frac{df_j}{dx_{\mu+l}} + \sum_{l=1}^{l=m-\mu} \sum_{k=1}^{k=m-\mu} \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+l}} \frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+k}} \frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+l} \partial x_{\mu+k}}$$

dont le second membre ne contient plus que des dérivées Δ.

Des équations du second ordre, nous pouvons donc tirer toutes les dérivées D en fonction des dérivées Δ. Mais les dérivées D de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i \leqslant \mu \quad j \leqslant \mu \quad i \pm j)$$

peuvent être obtenues chacune deux fois. En égalant ces deux valeurs de chacune d'elles, on aura des équations ne contenant plus que les dérivées Δ. On remarque que la somme double qui figure dans l'expression de $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ est symétrique relativement à f_i et f_j, de sorte qu'en égalant les deux expressions de cette dérivée, il reste l'équation

$$\frac{df_i}{dx_j} - \frac{df_j}{dx_i} + \sum_{l=1}^{l=m-\mu} \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+l}} \frac{df_j}{dx_{\mu+l}} - \frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+l}} \frac{df_i}{dx_{\mu+l}} \right) = 0,$$

ou, plus simplement,

(4) . . . . $[p_i - f_i, p_j - f_j] = 0,$

et cette équation ne contient même plus les dérivées Δ; elle est du premier ordre et, étant une conséquence des équations (2) et

de leurs dérivées, doit être vérifiée par toute solution du système (2).

Supposons que toutes les équations (4) que l'on peut ainsi obtenir ne soient pas toutes des conséquences algébriques des équations du système proposé (2). En les ajoutant à ce système, on aura un nouveau système composé d'un plus grand nombre d'équations distinctes et *ayant les mêmes intégrales.*

Si, en cherchant à le résoudre par rapport à des dérivées, on constate qu'il est incompatible ou qu'il s'intègre algébriquement, le problème est terminé.

Sinon, il se mettra sous la forme (2), μ ayant augmenté au moins d'une unité, et alors on pourra recommencer sur lui la même série de calculs.

Comme μ ne peut pas dépasser m, forcément, après avoir répété un nombre limité de fois cette série d'opérations, on arrivera à constater l'incompatibilité, ou à intégrer par des calculs algébriques, ou à un système de la forme (2), mais pour lequel toutes les équations (5) seront des conséquences algébriques des équations qui le composent. Nous dirons alors que le système est mis sous forme canonique. Ainsi, *un système canonique sera un système de la forme*

$$p_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m) = 0,$$

$$p_2 - f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_\mu - f_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m) = 0,$$

et tel que toutes les équations

$$[p_i - f_i, p_j - f_j] = 0$$

soient des conséquences algébriques des équations qui le composent, c'est-à-dire se réduisent à des identités quand, après les avoir développées, on y remplace $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ *respectivement par* $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$.

Et nous pouvons énoncer la propriété suivante :

THÉORÈME. — *Étant donné un système quelconque du premier ordre, par une suite limitée de calculs algébriques consistant en résolutions d'équations finies, on peut toujours constater qu'il est incompatible, ou trouver toutes ses intégrales, ou ramener son intégration à celle d'un système canonique.*

Dans la suite, nous ne considérerons plus que des systèmes canoniques, puisque c'est pour eux seuls que le problème de l'intégration existe véritablement.

12. *Propriété fondamentale de la forme canonique.* — Étant donné un système canonique S, en passant au second ordre, nous obtenons deux sortes d'équations.

Les premières expriment les dérivées D au moyen des dérivées Δ. Nous les appellerons *les équations du second ordre de* S.

Les autres sont les équations

$$[p_i - f_i, p_j - f_j] = 0,$$

qui sont au plus du premier ordre. Nous les appellerons *équations d'intégrabilité*; ces équations sont d'ailleurs des conséquences algébriques des équations S.

Supposons qu'on passe au troisième ordre, c'est-à-dire qu'on dérive par rapport à toutes les variables, les équations du second ordre de S. Nous aurons, comme pour le second ordre, des équations résolues par rapport à toutes les dérivées D du troisième ordre.

Mais certaines d'entre elles sont sûrement obtenues plusieurs fois; en égalant deux à deux ces valeurs d'une même dérivée D, on aura de nouvelles *équations d'intégrabilité* ne contenant, comme dérivées du troisième ordre, que des dérivées Δ et qui semblent, *a priori*, devoir permettre d'exprimer certaines d'entre elles au moyen des autres.

Nous allons montrer qu'il n'en est rien, c'est-à-dire que ces

équations d'intégrabilité se réduisent à des identités comme conséquence algébrique des équations du premier et du second ordre, et qu'il se passera un fait analogue pour tous les ordres.

Ainsi, nous nous proposons de démontrer ce théorème dont l'importance capitale apparaîtra dans le chapitre suivant.

THÉORÈME. — *Étant donné un système canonique* S, *les équations d'intégrabilité relatives à un ordre quelconque* n *se réduisent à des identités en vertu des équations d'ordre inférieur à* n *de* S.

Par hypothèse, cette propriété est vraie pour $n = 2$ (c'est la définition du système canonique). Pour démontrer qu'elle est générale, supposons-la vraie pour les ordres $2, 3, \ldots, n, n+1$ et démontrons qu'elle est vraie pour l'ordre $n+2$.

Soit

$$D_{n+2} = \frac{\partial^{n+2} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} \quad \begin{pmatrix} \alpha_p \pm 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n+2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\mu \pm 0 \end{pmatrix}$$

une dérivée D d'ordre $n+2$ pouvant être obtenue plusieurs fois. On aura toutes les équations d'intégrabilité qu'elle fournit en égalant toutes ses valeurs à l'une d'entre elles.

Considérons la dérivée d'ordre $n+1$

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p - 1}}.$$

C'est certainement une dérivée D, car si $p > \mu$, ses μ premiers indices α sont les mêmes que pour D_{n+2}, de sorte que leur somme n'est pas nulle et, si $p \leqq \mu$, ses μ premiers indices sont

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p - 1, 0 \ldots 0,$$

de sorte que leur somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p - 1 = n + 2 - 1 = n + 1$$

ne peut pas encore être nulle.

Nous pouvons donc poser

$$D_{n+1} = \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_p^{\alpha_p - 1}},$$

et nous aurons

$$D_{n+2} = \frac{\partial}{\partial x_p} D_{n+1}.$$

Supposons que D_{n+2} puisse être obtenue d'une autre façon, c'est-à-dire soit la dérivée d'une autre dérivée D d'ordre $n+1$

$$D_{n+2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_i^{\alpha_i - 1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} D'_{n+1}.$$

Posons

$$D_n = \frac{\partial^n}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots dx_i^{\alpha_i - 1} \dots \partial x_p^{\alpha_p - 1}}.$$

C'est bien une dérivée D en vertu du raisonnement qui nous a fourni D_{n+1} au moyen de D_{n+2}.

On aura

$$D_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x} D_n,$$

$$D'_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x_p} D_n.$$

Soit

$$D_n = \varphi_n$$

l'équation d'ordre n donnant la valeur de D_n, les équations d'ordre $n+1$ donnant D_{n+1} et D'_{n+1} seront

$$D_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_n,$$

$$D'_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x_p} \varphi_n,$$

ou, du moins, pourront se mettre sous cette forme parce que les conditions d'intégrabilité relatives à l'ordre $n+1$ sont des iden-

tités. Les deux manières d'obtenir D_{n+2} seront fournies par les deux équations

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left(D_{n+1} - \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_n\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D'_{n+1} - \frac{\partial}{\partial x_p}\varphi_n\right) = 0,$$

c'est-à-dire par

$$D_{n+2} = \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_n\right),$$

$$D_{n+2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\varphi_n\right);$$

l'équation d'intégrabilité correspondante peut donc se mettre, en vertu des équations d'ordre inférieur à $n + 2$, sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_n\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\varphi_n\right) = 0,$$

et c'est bien une identité, ce qui démontre le théorème annoncé.

13. *Changement de variables dans un système canonique.* — Pour qu'un système S, composé de μ équations, donne, par sa résolution, un système canonique, il faut et il suffit que, des μ équations qui le composent, on puisse tirer μ dérivées du premier ordre et que, des équations du second ordre, on puisse tirer toutes les dérivées D et rien qu'elles. Comme on est sûr de pouvoir les tirer toutes, il suffit qu'on ne puisse tirer qu'elles.

On peut donc dire que la condition nécessaire et suffisante est que S soit résoluble par rapport à μ dérivées et que les équations du premier et du second ordre se réduisent à un nombre d'équations distinctes égal à μ augmenté du nombre des dérivées D, nombre qui ne dépend évidemment que de μ.

Supposons qu'on fasse un changement de variables; les μ équations S seront encore résolubles par rapport à μ des nouvelles dérivées du premier ordre et le nombre des équations du premier et du second ordre qui sont distinctes, sera évidem-

ment le même qu'avant le changement de variables; il sera donc encore égal à μ augmenté du nombre des dérivées D.

On en conclut que le système transformé fournira certainement un système canonique lorsqu'on l'aura résolu par rapport à μ des nouvelles dérivées du premier ordre.

C'est ce que nous exprimerons d'une façon abrégée comme il suit :

Théorème. — *Un système canonique reste canonique par un changement quelconque de variables.*

14. *Méthode pratique pour réduire un système à sa forme canonique.* — Au point de vue pratique, la réduction, telle qu'elle a été indiquée au § 11, n'est pas commode à employer. Cela tient à ce que les équations d'intégrabilité se forment au moyen des fonctions f et qu'un système de la forme (1) et dont les équations sont très simples, peut conduire, par sa résolution, à des fonctions f beaucoup plus compliquées et, par suite, à des calculs très pénibles.

Nous allons montrer qu'on parvient au même résultat en formant des équations d'intégrabilité de même forme sur les équations non résolues.

Théorème. — *Toute intégrale commune aux deux équations*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, \ldots, p_m) = 0,$$

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, \ldots, p_m) = 0,$$

vérifie l'équation du premier ordre

$$[F, \Phi] = 0.$$

z vérifiant les deux équations $F = 0$, $\Phi = 0$, on a, par dérivation,

$$\frac{d\Phi}{dx_1} + \sum_{j=1}^{j=m} \frac{\partial\Phi}{\partial p_j} \frac{\partial^2 z}{dx_1\, dx_j} = 0.$$

Multiplions par $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ et faisons la somme des équations analogues pour $i = 1, 2, \ldots, m$. Nous obtiendrons

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{d\Phi}{dx_i} + \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=m} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

En partant de l'autre équation, on aurait obtenu de même

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dF}{dx_i} + \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=m} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 0;$$

la somme double est la même dans les deux équations; en retranchant, il reste donc

$$\sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{d\Phi}{dx_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dF}{dx_i} \right) = 0,$$

ou, plus simplement,

$$[F, \Phi] = 0.$$

Étant donné un système

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_\mu = 0$$

que nous supposerons *non résolu,* mais *résoluble* par rapport à des dérivées (sans quoi le problème de l'intégration n'existerait pas), nous obtiendrons un système équivalent en lui ajoutant toutes les équations

$$[F_i, F_j] = 0.$$

Supposons qu'elles ne soient pas toutes des conséquences algébriques des équations F. Nous aurons un nouveau système et nous devrons nous assurer qu'il est résoluble par rapport à des dérivées, car, dans le cas contraire, le problème serait terminé. Sur ce nouveau système, nous pourrons recommencer et, finalement, nous arriverons à *un système*

(5) . . . . $F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_\mu = 0$

résoluble par rapport à μ dérivées et tel que toutes les équations

$$[F_i, F_j] = 0$$

soient des conséquences algébriques des équations $F = 0$.

Supposons alors qu'on résolve le système (5) par rapport à μ dérivées, par exemple, $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$; nous allons obtenir le théorème suivant :

Théorème. — *Si en résolvant le système* (5), *on en tire les valeurs*

$$(6) \quad \ldots \quad p_1 = f_1, \quad p_2 = f_2, \quad \ldots, \quad p_\mu = f_\mu,$$

qui n'annulent pas identiquement le déterminant fonctionnel

$$\delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_\mu)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_\mu)},$$

le système (6) *est certainement canonique.*

Dire que les équations

$$[F_i, F_j] = 0$$

sont des conséquences algébriques des équations (5), c'est dire qu'elles sont vérifiées par tout système de valeurs des x, des z et des p vérifiant (5); donc elles doivent se réduire à des identités quand on y remplacera $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ respectivement par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$.

Considérons les f comme des fonctions implicites définies par les équations (3). Nous en tirerons

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial z} + \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial f_k}{\partial z} = 0,$$

d'où, en multipliant la seconde par p_i et ajoutant

$$\frac{dF_\alpha}{dx_i} + \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_k} \frac{df_k}{dx_i} = 0.$$

Mais on a

$$\frac{df_k}{dx_i} = -\frac{d(p_k - f_k)}{dx_i},$$

de sorte que l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{dF_\alpha}{dx_i} = \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \frac{d(p_k - f_k)}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

De même on a

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial(p_k - f_k)}{\partial p_i} \qquad (i = \mu + 1, \ldots, m)$$

et cette relation est évidente pour $i = 1, 2, \ldots, \mu$ parce que les f_k ne contiennent aucune des dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$.

En écrivant les relations analogues pour F_β, formant

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} \frac{dF_\beta}{dx_i} - \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} \frac{dF_\alpha}{dx_i}$$

et sommant par rapport à i, on parvient à la relation

$$[F_\alpha, F_\beta] = \sum_{k=1}^{k=\mu} \sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_h} [p_h - f_h, p_k - f_k],$$

formule dans laquelle, après le développement des [,], il faut supposer $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ remplacés par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$. Mais alors le premier membre est nul par hypothèse, de sorte que nous avons

$$\sum_{k=1}^{k=\mu} \sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_h} [p_h - f_h, p_k - f_k] = 0,$$

et nous aurons autant d'identités analogues qu'il y aura de combinaisons deux à deux des équations F.

Prenons les μ équations correspondant à une même valeur de β ; on pourra les écrire

$$\sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_h} [p_h - f_h, p_k - f_k] = 0;$$

et prenons comme nouvelles inconnues les quantités

$$U_k = \sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_h} [p_h - f_h, p_k - f_k];$$

elles prendront la forme

$$\sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} U_k = 0.$$

Ce sont μ équations linéaires et homogènes dont le déterminant est précisément δ dans lequel on aurait remplacé $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$; il n'est pas nul, de sorte que nous avons les équations nouvelles

$$U_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_h} [p_h - f_h, p_k - f_k] = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, \mu \\ \beta = 1, 2, \ldots, \mu \end{pmatrix}$$

Considérons toutes celles qui correspondent à la même valeur de k. Comme précédemment, on aura μ équations linéaires et homogènes, où les inconnues seront

$$[p_h - f_h, p_k - f_k] \qquad (h = 1, 2, \ldots, \mu)$$

et dont le déterminant sera encore δ, où l'on aurait remplacé $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ par leurs valeurs. Il en résulte que les crochets qui correspondent à une même valeur de k sont tous nuls, et c'est vrai quel que soit k.

Si l'on se reporte à ce qui a été dit plus haut, les crochets qui figurent dans notre calcul sont les crochets dans lesquels, après développement, on aurait remplacé $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ par leurs

valeurs $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, et nous venons de démontrer que, dans ces conditions, ils sont identiquement nuls, ce qui revient à dire que les équations

$$[p_h - f_h, p_k - f_k] = 0$$

sont des conséquences algébriques des équations (6) ou que le système (6) est canonique.

15. *Systèmes canoniques particuliers.* — Nous verrons plus tard que les systèmes canoniques où z ne figure pas offrent un intérêt particulier, car ils correspondent à une réduction des ordres d'opérations nécessaires pour l'intégration.

On voit immédiatement que si z ne figure pas dans des équations, z ne figure pas dans les équations d'intégrabilité correspondantes. Il en résulte que le cas où l'on arrive à l'intégration algébrique ne peut jamais se présenter. On arrivera à l'incompatibilité ou à un système canonique dans lequel z ne figurera pas ; donc :

En cherchant à mettre sous forme canonique un système où z *ne figure pas, on constate l'incompatibilité ou on arrive à un système canonique où* z *ne figure pas.*

Considérons deux équations linéaires quelconques

$$F = A_1 p_1 + A_2 p_2 + \cdots A_m p_m - B = 0,$$
$$\Phi = A'_1 p_1 + A'_2 p_2 + \cdots A'_m p_m - B' = 0;$$

l'équation d'intégrabilité correspondante peut s'écrire

$$\sum \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sum p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial z} \sum p_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_i} = 0,$$

ou, en vertu de la forme linéaire des deux équations

$$\sum \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) + B \frac{\partial \Phi}{\partial z} - B' \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

elle est linéaire, de sorte que :

Tout système linéaire est incompatible, s'intègre algébriquement ou donne un système canonique linéaire.

En particulier, considérons des équations linéaires, homogènes et ne contenant pas z. Les équations d'intégrabilité sont encore de même forme et il ne peut pas y avoir incompatibilité, puisque les équations sont certainement vérifiées par $z = c^{te}$.

Appelons *système jacobien* tout système canonique formé de telles équations. Nous pourrons dire :

Tout système linéaire, homogène et ne contenant pas z, *conduit à un système jacobien.*

Pour les systèmes particuliers que nous venons de considérer, les équations d'intégrabilité peuvent prendre des formes plus simples.

Pour les systèmes ne contenant pas z, ces équations se réduiront évidemment à la forme

$$(F_i, F_j) = 0.$$

Plus particulièrement, considérons les systèmes linéaires et homogènes ne contenant pas z.

Soient

$$F_1 = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_m p_m = 0,$$
$$F_2 = b_1 p_1 + b_2 p_2 + \dots + b_m p_m = 0$$

deux de ces équations. On aura

$$(F_1, F_2) = \sum_{k=1}^{k=m} a_k \frac{\partial F_2}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{k=m} b_k \frac{\partial F_1}{\partial x_k} = F_1(F_2) - F_2(F_1)$$

en convenant qu'en appliquant à F_2 l'opération F_1 on considérera les p qui figurent dans F_2 comme des constantes et de même en appliquant à F_1 l'opération F_2.

Les équations d'intégrabilité prennent donc ici la forme

$$F_i(F_j) - F_j(F_i) = 0.$$

Voyons enfin les réductions dans les conditions pour qu'un système

$$p_1 - f_1 = 0, \quad p_2 - f_2 = 0, \quad \dots, \quad p_\mu - f_\mu = 0$$

soit canonique.

Si z ne figure pas dans ces équations, les équations d'intégrabilité

$$(p_i - f_i, p_j - f_j) = 0$$

ne contiendront aucune des dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, de sorte qu'elles ne peuvent être des conséquences algébriques du système proposé que si elles se réduisent à des identités; donc :

Pour que le système

$$p_1 - f_1 = 0, \quad p_2 - f_2 = 0, \quad \ldots, \quad p_\mu - f_\mu = 0,$$

ne contenant pas z, soit canonique, il faut et il suffit que toutes les équations

$$(p_i - f_i, p_j - f_j) = 0$$

soient des identités.

Considérons enfin un système

$$(7) \quad \ldots \quad \begin{cases} F_1 = p_1 + a^1_{\mu+1} p_{\mu+1} + \cdots + a^1_m p_m = 0, \\ F_2 = p_2 + a^2_{\mu+1} p_{\mu+1} + \cdots + a^2_m p_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_\mu = p_\mu + a^\mu_{\mu+1} p_{\mu+1} + \cdots + a^\mu_m p_m = 0 \end{cases}$$

et cherchons à quelles conditions il sera jacobien. Il faudra que les équations

$$F_i(F_j) - F_j(F_i) = 0$$

soient des identités. Or, on peut les écrire en les ordonnant par rapport aux p

$$\sum_{k=1}^{k=m-\mu} p_{\mu+k} \left[F_i(a^j_{\mu+k}) - F_j(a^i_{\mu+k})\right] = 0.$$

Donc, *pour que le système* (7) *soit jacobien, il faut et il suffit que l'on ait identiquement*

$$F_i(a^j_{\mu+k}) = F_j(a^i_{\mu+k}) \quad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots, \mu \\ k = 1, 2, \ldots, m - \mu \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE III.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES SYSTÈMES CANONIQUES.

16. *Théorème fondamental sur l'existence des intégrales d'un système canonique.*

Soit un système canonique

$$(S) \quad . \quad . \quad . \quad . \left\{ \begin{array}{l} p_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m), \\ p_2 = f_2(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_\mu = f_\mu(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m) \end{array} \right.$$

et un système de valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_m^0$ *des variables* x. *Soit, en outre,*

$$\theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$$

une fonction de $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$, *analytique en* $x_{\mu+1}^0, \ldots, x_m^0$, *et désignons par* z_0 $p_{\mu+1}^0, \ldots, p_m^0$ *les valeurs en* $x_{\mu+1}^0, \ldots, x_m^0$, *de* $\theta, \frac{\partial\theta}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial x_m}$.

Si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, *où l'on considère* $x_1, \ldots, x_m$, $z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m$ *comme des variables indépendantes, sont analytiques en* $x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, p_{\mu+1}^0, \ldots, p_m^0$, *il existe une fonction* $\Theta(x_1\, x_2, \ldots, x_m)$ *et une seule vérifiant le système* S, *analytique en* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ *et se réduisant à* θ *pour* $x_1 = x_1^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$.

Désignons, pour abréger, par $E_1, E_2, \ldots, E_\mu$ les μ équations du système S.

On obtiendra *toutes* les équations du système S prolongé indéfiniment en prenant les dérivées des équations E de façon à obtenir une fois, au moins, chaque dérivée D.

Or, il est évident que toute dérivée D

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m} z}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

dans laquelle α_1 n'est pas nul, est une dérivée de p_1, et que toute dérivée D pour laquelle $\alpha_1 = 0$, est une dérivée de $p_2, \ldots, p_\mu$ prise uniquement par rapport aux variables $x_2, \ldots, x_m$.

Il en résulte qu'on obtiendra certainement *toutes* les équations du système $\mathcal{S}$ prolongé indéfiniment en prenant les dérivées de E_1 par rapport à toutes les variables et les dérivées de $E_2, \ldots, E_\mu$, par rapport aux seules variables $x_2, \ldots, x_m$.

Toute équation appartenant au système et formée d'une autre façon sera une conséquence algébrique de celles que nous venons de former par ce procédé.

Convenons de désigner par $\mathcal{E}_1$ l'ensemble de l'équation E_1 et de toutes ses dérivées; par $\mathcal{S}'_1$, l'ensemble des équations $E_2, \ldots, E_\mu$; par $\mathcal{S}''_1$ l'ensemble des équations $\mathcal{S}'_1$ et de toutes leurs dérivées par rapport aux variables $x_2, \ldots, x_m$, et enfin par Σ l'ensemble des équations $\mathcal{S}$ et de toutes leurs dérivées.

Ceci posé, et pour plus de netteté, nous allons décomposer la démonstration en quatre parties.

1° D'après le théorème de Cauchy, l'équation E_1 définit sans ambiguïté une intégrale analytique Θ quand on se donne la fonction analytique $\Theta_1(x_2, \ldots, x_m)$ à laquelle elle doit se réduire pour $x_1 = x_1^0$.

Nous allons nous proposer de déterminer Θ_1 de façon que l'intégrale correspondante de E_1 vérifie, non seulement E_1, mais aussi toutes les autres équations de $\mathcal{S}$ et se réduise à $\theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$ en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$.

Pour que cette dernière condition soit réalisée, il faut et il suffit que Θ_1 se réduise à θ pour $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$. Supposons qu'il en soit ainsi. La fonction f_1 ne contient que les dérivées $p_{\mu+1}, \ldots, p$ et les valeurs en $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ de z et de ces dérivées peuvent être calculées sur Θ_1 en faisant, au préalable, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$, c'est-à-dire peuvent être calculées sur θ. Ces valeurs initiales sont donc $z^0, p_{\mu+1}^0, \ldots, p_m^0$; d'après les hypothèses faites, f_1 sera analytique en $x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, p_{\mu+1}^0, \ldots, p_m^0$, de sorte que l'on sera rigoureusement dans les conditions d'application du théorème de Cauchy et qu'on obtiendra une intégrale Θ, analytique et unique.

2° Θ doit vérifier les équations S'_1. Remplaçons-y z par Θ; elles deviennent des identités qui continueront à être des identités quand on y fera $x_1 = x_1^0$. Comme ces équations ne contiennent pas p_1, cela revient à faire $x_1 = x_1^0$ dans les équations S'_1, ce qui donne un système S_1, puis à y remplacer z par Θ dans laquelle on aurait également fait $x_1 = x_1^0$, c'est-à-dire par Θ_1; donc Θ_1 *doit vérifier le système* S_1 *obtenu en faisant* $x_1 = x_1^0$ *dans* S'_1.

Réciproquement, *supposons que* Θ_1 *vérifie* S_1. Θ_1 vérifie toutes les équations dérivées de S_1, équations qui ne sont que les équations S''_1 dans lesquelles on aurait fait $x_1 = x_1^0$. Autrement dit, en remplaçant z par Θ dans les équations S''_1, on obtient des équations qui se réduisent à des identités si l'on y fait $x_1 = x_1^0$.

D'autre part, Θ étant solution de E_1, vérifie identiquement les équations $\mathcal{E}_1$, lesquelles restent encore des identités en y faisant $x_1 = x_1^0$.

Comme toutes les équations Σ sont des équations S''_1 ou $\mathcal{E}_1$, ou des conséquences algébriques de ces équations, on peut dire :

Si, dans toutes les équations Σ, *on remplace* z *par* Θ, *on obtient des égalités qui deviennent des identités si l'on y fait* $x_1 = x_1^0$.

Prenons une équation $E_i (i = 2, 3, \ldots, \mu)$ et considérons ses dérivées successives par rapport à x_1

$$p_i - f_i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}(p_i - f_i) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(p_i - f_i) = 0, \quad \ldots$$

Ce sont des équations Σ, de sorte que si, dans $p_i - f_i$, on remplace z par Θ, on obtient une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, analytique en $x_1^0, \ldots, x_m^0$ et qui s'annule identiquement ainsi que toutes ses dérivées par rapport à x_1 quand on y fait $x_1 = x_1^0$. Cette fonction est donc identiquement nulle, ce qui démontre que Θ vérifie toutes les équations S'_1. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale Θ *de l'équation* E_1 *soit une intégrale du système* S, *est que sa fonction initiale* Θ_1 *soit une intégrale de* S_1.

3° Démontrons maintenant que S_1 *est canonique*. Les équa-

tions d'intégrabilité de S_1 ne sont que les équations d'intégrabilité fournies par les équations S'_1 prises deux à deux et dans lesquelles on aurait fait $x_1 = x_1^0$.

Ces équations d'intégrabilité étaient relatives à S; elles se réduisaient à des identités en y remplaçant $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$; comme elles ne contenaient pas p_1, elles devenaient des identités en y remplaçant $p_2, \ldots, p_\mu$ par $f_2, \ldots, f_\mu$. Supposons qu'on y fasse $x_1 = x_1^0$, on aura les équations d'intégrabilité de S_1 et elles se réduiront à des identités en y remplaçant $p_2, \ldots, p_\mu$ par $f_2, \ldots, f_\mu$ dans lesquelles on aurait fait $x_1 = x_1^0$, autrement dit, elles deviendront des identités en vertu des équations S_1, ce qui démontre bien que S_1 est canonique.

4° Ce qui précède nous montre que la question est ramenée à démontrer l'existence de Θ_1 vérifiant S_1 et se réduisant à θ pour $x_2 = x_2^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$. D'après les hypothèses faites sur θ et S, les seconds membres des équations S_1 sont analytiques en $x_2^0, \ldots, x_m^0, z^0, p_{\mu+1}^0, \ldots, p_m^0$, de sorte que c'est exactement le même problème, mais pour un système ayant une équation et une variable de moins.

Sur Θ_1 et S_1, nous pourrons recommencer les raisonnements précédemment faits pour Θ et S. Nous déterminerons Θ_1, au moyen de la première équation de S_1, par sa fonction initiale pour $x_2 = x_2^0$, soit $\Theta_2(x_3, \ldots, x_m)$, qui devra se réduire elle-même à θ pour $x_3 = x_3^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$ et vérifier un système S_2 qu'on obtiendra en faisant $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$ dans les $\mu - 2$ dernières équations de S.

On aura, en continuant ainsi, des fonctions intermédiaires

$$\Theta_1(x_2, \ldots, x_m), \quad \Theta_2(x_3, \ldots, x_m), \quad \ldots, \quad \Theta_{\mu-1}(x_\mu, \ldots, x_m)$$

vérifiant les systèmes successifs

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_{\mu-1}.$$

Le dernier, $S_{\mu-1}$, est composé d'une seule équation

$$p_\mu = f_\mu(x_1^0, \ldots, x_{\mu-1}^0, x_\mu, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m)$$

qui, d'après le théorème de Cauchy, admettra une et une seule intégrale $\Theta_{\mu-1}$, se réduisant à θ pour $x_\mu = x_\mu^0$.

La démonstration est donc terminée. Ce théorème est une extension du théorème de Cauchy relatif à une seule équation. Pour abréger, nous l'appellerons *théorème de Cauchy généralisé.*

17. *Problème de Cauchy.* — Considérons, dans l'espace à $m+1$ dimensions, une multiplicité ponctuelle $M_{m-\mu}$ à $m-\mu$ dimensions, supposons que ses équations soient mises sous la forme

$$x_1 = \varphi_1(x_{\mu+1}, \ldots, x_m),$$
$$x_2 = \varphi_2(x_{\mu+1}, \ldots, x_m),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_\mu = \varphi_\mu(x_{\mu+1}, \ldots, x_m),$$
$$z = \varphi\,(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$$

et cherchons à voir s'il existe une intégrale de S passant par $M_{m-\mu}$, c'est-à-dire se réduisant à φ si l'on y fait $x_1 = \varphi_1, \ldots, x_\mu = \varphi_\mu$.

Faisons le changement de variables

$$x_1 - \varphi_1 = x'_1, \quad \ldots, \quad x_\mu - \varphi_\mu = x'_\mu, \quad x_{\mu+1} = x'_{\mu+1}, \quad \ldots, \quad x_m = x'_m.$$

On aura un nouveau système S′

$$p'_1 - f'_1 = 0, \quad p'_2 - f'_2 = 0, \quad \ldots, \quad p'_\mu - f'_\mu = 0$$

que devra vérifier z exprimée au moyen de nouvelles variables, et z devra maintenant se réduire à $\varphi(x'_{\mu+1}, \ldots, x'_m)$ pour $x'_1 = 0, \ldots, x'_\mu = 0$. Comme S′ est canonique (§ 13), en général, d'après le théorème de Cauchy généralisé, cette intégrale existera et sera unique, de sorte que :

Étant donné un système canonique S *à* m *variables et* μ *équations, et, dans l'espace à* m + 1 *dimensions, une multiplicité ponctuelle* $M_{m-\mu}$, *il y a, en général, une et une seule surface intégrale passant par* $M_{m-\mu}$.

C'est la recherche de cette surface intégrale qui constitue ce qu'on appelle le *problème de Cauchy*. C'est le problème le plus général que l'on puisse se poser sur la détermination d'une intégrale et qui soit sûrement résoluble.

D'après le calcul précédent, on peut généralement ramener, par un changement de variables, au cas où les équations de $\mathrm{M}_{m-\mu}$ sont

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_\mu = x_\mu^0, \quad z = \theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m),$$

c'est-à-dire à chercher une intégrale qui est définie comme il a été indiqué dans l'énoncé du théorème de Cauchy généralisé.

A partir de ce moment, chaque fois que nous chercherons à traiter le problème de Cauchy, ce qui sera d'ailleurs le but principal que nous proposerons d'atteindre, nous le prendrons sous cette forme réduite. C'est ce que nous avons déjà fait dans le cas des équations linéaires (§§ 3, 4, 6, 7).

18. *Réduction à des équations successives.* — La démonstration du théorème de Cauchy généralisé nous fournit en même temps une propriété d'une grande importance.

Reprenons les systèmes successifs $\mathrm{S}, \mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_{\mu-1}$ et soient

$$\begin{array}{ll}
e_1 \quad \ldots & p_1 = f_1(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m), \\
e_2 \quad \ldots & p_2 = f_2(x_1^0, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m), \\
\vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_\mu \quad \ldots & p_\mu = f_\mu(x_1^0, \ldots, x_{\mu+1}^0, x_\mu, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m)
\end{array}$$

les équations obtenues en prenant seulement la première de chaque système.

D'après ce qui a été dit, pour avoir l'intégrale Θ qui vérifie S et se réduit à $\theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$ en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$, on devra considérer une suite de fonctions

$$\theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m), \quad \Theta_{\mu-1}(x_\mu, \ldots, x_m), \quad \ldots, \quad \Theta_1(x_2, \ldots, x_m), \quad \Theta(x_1, \ldots, x_m)$$

dont la première est donnée à l'avance et dont les autres s'obtiennent de proche en proche par le procédé suivant : *Chaque fonction* Θ_i *est une intégrale de* e_{i+1} *déterminée par la condition de se réduire à* Θ_{i+1} *pour* $x_{i+1} = x^0_{i+1}$.

La dernière fonction obtenue par ce procédé est l'intégrale cherchée Θ.

Pour avoir la solution du problème de Cauchy pour le système S, on est ainsi ramené à résoudre le même problème successivement pour les équations $e_\mu, e_{\mu-1}, \ldots, e_1$, c'est-à-dire à *intégrer* ces équations successives.

Considérons l'une quelconque de ces équations

$$e_i \quad . \quad . \quad . \quad p_i = f_i(x^0_1, \ldots, x^0_{i-1}, x_i, \ldots, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m);$$

il y figure les $m - i + 1$ variables $x_i, \ldots, x_m$, mais il n'y entre que les dérivées $p_i, p_{\mu+1}, \ldots, p_m$, de sorte que, au point de vue de l'intégration, on pourra considérer $x_{i+1}, \ldots, x_{\mu-1}$ comme des constantes, et alors il ne restera plus que $m - \mu + 1$, véritables variables qui seront $x_i, x_{\mu+1}, \ldots, x_m$.

Nous obtenons ainsi ce résultat intéressant :

Théorème. — *L'intégration d'un système canonique de* μ *équations simultanées à* m *variables peut toujours se ramener à l'intégration successive de* μ *équations du premier ordre à* $m - \mu + 1$ *variables.*

19. *Réduction à une seule équation.* — De la démonstration qui a été donnée pour le théorème de Cauchy généralisé, on peut déduire une réduction encore plus complète du problème de l'intégration.

Supposons que, dans S on fasse le changement de variables

$$x_1 = x^0_1 + y_1, \quad x_2 = x^0_2 + y_1 y_2, \quad \ldots, \quad x_\mu = x^0_\mu + y_1 y_\mu,$$

$$x_{\mu+1} = y_{\mu+1}, \quad \ldots, \quad x_m = y_m,$$

et désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_m$ les dérivées de z par rapport aux nouvelles variables. On aura

$$q_1 = p_1 + y_2 p_2 + \cdots + y_\mu p_\mu, \quad q_2 = y_1 p_2, \quad \ldots, \quad q_\mu = y_1 p_\mu,$$
$$q_{\mu+1} = p_{\mu+1}, \quad \ldots, \quad q_m = p_m.$$

Le système transformé sera, en désignant par $f'_1, f'_2, \ldots, f'_\mu$ les fonctions f où l'on aurait remplacé les x au moyen des y et $p_{\mu+1}, \ldots, p_m$ par $q_{\mu+1}, \ldots, q_m$,

$$(s) \begin{cases} q_1 = f'_1 + y_2 f'_2 + \cdots + y_\mu f'_\mu = \mathrm{F}(y_1, y_2, \ldots, y_m, z, q_{\mu+1}, \ldots, q_m), \\ q_2 = y_1 f'_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_\mu = y_1 f'_\mu. \end{cases}$$

Ce système est résolu par rapport à μ dérivées et, étant transformé d'un système canonique, est aussi canonique.

Pour intégrer S, il suffit d'intégrer s. Supposons qu'on sache intégrer la première équation de s

R . . . . $q_1 = \mathrm{F}$,

équation que nous appellerons la *réduite* du système S, et cherchons à quelles conditions une intégrale de cette équation est une intégrale du système s.

Nous commencerons par remarquer que si les fonctions f sont analytiques pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$ et pour certaines valeurs initiales de $x_{\mu+1}, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m$, les fonctions f' et aussi F seront analytiques pour $y_1 = 0$, et pour certaines valeurs initiales de $y_2, \ldots, y_m, z, q_{\mu+1}, \ldots, q_m$, de sorte que nous pouvons définir des intégrales analytiques de R au moyen de leurs fonctions initiales pour $y_1 = 0$.

Soit donc Φ une intégrale de R ayant pour fonction initiale $\varphi(y_2, \ldots, y_m)$. Pour que Φ soit une intégrale de s, il faut et il suffit, comme nous l'avons montré, que sa fonction initiale φ

vérifie le système obtenu en prenant toutes les équations de s, sauf la première, et y faisant $y_1 = 0$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_\mu} = 0.$$

Pour qu'une intégrale de R *soit une intégrale de* s, *il faut et il suffit que sa fonction initiale ne dépende que de* $y_{\mu+1}, \ldots, y_m$.

Si on sait intégrer R, « *intégrer* » *signifiant qu'on sait traiter le problème de Cauchy*, on saura certainement trouver toutes les intégrales de s, et, en revenant aux variables primitives, toutes celles de S.

Supposons qu'on veuille traiter le problème de Cauchy pour le système S, c'est-à-dire trouver l'intégrale Θ, analytique en $x_1^0, \ldots, x_m^0$ et qui, en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$, se réduit à $\theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$.

Θ exprimée au moyen des y, sera une fonction analytique pour $y_1 = 0, y_{\mu+1} = x_{\mu+1}^0, \ldots, y_m = x_m^0$, quelles que soient les valeurs de $y_2, \ldots, y_\mu$, et qui, pour $y_1 = 0$, se réduira à $\theta(y_{\mu+1}, \ldots, y_m)$.

En outre, les valeurs de $q_{\mu+1}, \ldots, q_m$, pour $y_1 = 0$ seront égales aux valeurs de $p_{\mu+1}, \ldots, p_m$ en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$, c'est-à-dire seront $p_{\mu+1}^0, \ldots, p_m^0$. Il en résulte que les fonctions f' et, par suite, la fonction F, seront analytiques pour $y_1 = 0$, $y_{\mu+1} = x_{\mu+1}^0, \ldots, y_m = x_m^0$, $z = z^0$, $q_{\mu+1} = p_{\mu+1}^0, \ldots, q_m = p_m^0$ quelles que soient les valeurs de $y_2, \ldots, y_\mu$.

Pour déterminer Θ comme solution de R au moyen de sa fonction initiale $\theta(y_{\mu+1}, \ldots, y_m)$, on sera donc rigoureusement dans les conditions d'application du théorème de Cauchy et R possédera une seule intégrale analytique se réduisant à $\theta(y_{\mu+1}, \ldots, y_m)$. C'est dans cette intégrale bien déterminée qu'il faudra faire le changement inverse de variables pour avoir l'intégrale cherchée du système S.

L'équation R ne contient que les dérivées $q_1, q_{\mu+1}, \ldots, q_m$; pour l'intégrer, on peut considérer $y_2, \ldots, y_\mu$ comme des constantes, de façon que R soit une équation à $m - \mu + 1$ variables.

En continuant à attribuer au mot *intégrer* le sens précis déjà indiqué, nous pouvons en toute rigueur énoncer le théorème suivant, qui est fondamental pour la suite :

Théorème. — *L'intégration d'un système canonique de μ équations à* m *variables peut toujours se ramener à l'intégration d'une seule équation à* m — μ + 1 *variables.*

Pour la suite, nous conviendrons de désigner toujours par la lettre Θ les intégrales de R qui correspondent à des fonctions initiales indépendantes de $y_2, \ldots, y_\mu$ et nous dirons :

L'intégration d'un système canonique de μ équations à m *variables se ramène à la recherche des intégrales Θ de sa réduite* R.

20. *Intégration d'un système canonique dans le cas de $\mu =$* m. — Cette intégration est immédiate d'après ce qui précède, car l'équation R est ici à $m - m + 1$ variables, c'est une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dz}{dy_1} = F(y_1, y_2, \ldots, y_m, z).$$

Une intégrale de S est déterminée quand on se donne la constante θ à laquelle elle se réduit quand on y fait $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$. Il faudra donc chercher l'intégrale de l'équation différentielle R, qui, pour $y_1 = 0$, se réduit à la constante absolue θ, et y faire ensuite le changement inverse de variables.

Si

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m, z) = c^{te}$$

est l'intégrale générale de R, la constante du second membre doit être considérée comme une fonction de $y_2, \ldots, y_m$ et, pour avoir la fonction Θ exprimée au moyen des variables y, il suffit évidemment de résoudre l'équation

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m, \Theta) = \Phi(0, y_2, \ldots, y_m, \theta).$$

Le calcul se simplifie quand z ne figure pas dans S; alors z ne figure pas dans R et l'intégration de cette équation se fait par une simple quadrature partielle. On aura

$$\Phi = z - \int_0^{y_1} \mathrm{F}(y_1, y_2, \ldots, y_m)\, dy_1$$

et, par suite,

$$\Theta = b + \int_0^{y_1} \mathrm{F}(y_1, y_2, \ldots, y_m)\, dy_1.$$

21. *Intégration de l'équation aux différentielles totales.*

$$dz = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_m dx_m.$$

Ce problème se ramène immédiatement au précédent, car il consiste à trouver une fonction z de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ telle que l'on ait :

$$p_1 = f_1, \quad p_2 = f_2, \quad \ldots, \quad p_m = f_m,$$

Si ce système n'est pas canonique, en formant les équations d'intégrabilité, on constatera qu'il est incompatible ou on l'intégrera algébriquement, et dans ce dernier cas, dans l'expression de ses intégrales ne figurera aucune quantité arbitraire.

Si le système est canonique, son intégration se ramène à celle d'une équation différentielle ordinaire R et l'expression générale des intégrales Θ de cette équation contiendra une constante arbitraire.

Dans le cas où les f ne contiennent pas z, la recherche de z se ramène à une quadrature partielle et la constante arbitraire qui figure dans l'expression générale de z est une constante additive.

22. *Intégrales singulières. Intégrales infiniment voisines.* — Dans la théorie des équations aux dérivées partielles, on ne considère que les intégrales analytiques, car ce sont les seules qu'on sait utiliser et les seules dont on sait démontrer l'existence.

Le théorème de Cauchy généralisé fournit de telles intégrales, mais rien ne prouve *a priori* qu'il les fournisse toutes.

S'il existe des intégrales analytiques et ne pouvant pas être obtenues par l'application du théorème de Cauchy, nous les appellerons *intégrales singulières*.

Considérons un système S non résolu, mais auquel on aurait appliqué la méthode du § 14 de façon à le compléter. Il est alors formé de μ équations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_\mu = 0$$

résolubles par rapport à μ dérivées, et cette résolution fournit un système canonique.

Convenons de désigner par $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\nu$, tous les déterminants fontionnels de la forme

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_\mu)}{D(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \dots, p_{\alpha_\mu})}$$

obtenus en prenant toutes les combinaisons μ à μ de $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Soit Ψ une intégrale analytique de S, c'est-à-dire analytique dans certaines régions de l'espace à $m + 1$ dimensions. Dans une de ces régions, prenons un point arbitraire M_0 et désignons par *élément de l'intégrale* en M_0 l'ensemble des valeurs $x_1^0, \dots, x_m^0$, $z^0, p_1^0, \dots, p_m^0$ que prennent les x, z et les p pour Ψ en ce point, et supposons que Ψ ne soit pas telle que l'une des fonctions F cesse d'être analytique en chacun de ses éléments (*).

Supposons que les δ ne soient pas tous identiquement nuls pour tous les éléments de Ψ. On pourra alors trouver un point M_0 tel que, pour l'élément correspondant de Ψ, tous les F soient analytiques et que l'on ait

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_\mu)}{D(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \dots, p_{\alpha_\mu})} \pm 0.$$

D'après le théorème général sur les fonctions implicites, les

(*) Il peut exister de telles intégrales, mais nous ne les étudierons pas.

équations F pourront être résolues par rapport à $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_\mu}$ en donnant

$$(S') \quad \ldots \quad p_{\alpha_1} = f_{\alpha_1}, \quad p_{\alpha_2} = f_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad p_{\alpha_\mu} = f_{\alpha_\mu},$$

les f étant analytiques pour les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_m^0$, $z^0, p_{\beta_1}^0, \ldots$ des x de z et des autres p et se réduisant respectivement à $p_{\alpha_1}^0, \ldots, p_{\alpha_\mu}^0$ pour ces valeurs initiales.

Si S est *indécomposable*, le système résolu auquel nous arrivons est certainement canonique, car s'il ne l'était pas, il donnerait des équations complémentaires et les autres déterminations qu'on en pourrait tirer pour $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_\mu}$, n'étant pas analytiquement distinctes de celles que nous considérons, conduiraient aussi à des équations complémentaires qui, analytiquement, ne seraient pas distinctes des premières, de sorte qu'il y aurait des équations complémentaires distinctes des équations F et qui seraient vérifiées par toutes les intégrales de S, ce qui est contraire aux hypothèses faites sur ce système.

Considérons la fonction Ψ; elle doit vérifier l'un des systèmes que l'on obtient en résolvant S par rapport à $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_\mu}$, et comme il n'y a que S′ pour lequel $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_\mu}$ se réduisent à $p_{\alpha_1}^0, \ldots, p_{\alpha_\mu}^0$ pour $x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, p_{\beta_1}^0, \ldots$, cette intégrale Ψ vérifie S.

Si nous désignons par $\Psi(x_{\beta_1}, \ldots)$ la fonction à laquelle elle se réduit en $x_{\alpha_1}^0, \ldots, x_{\alpha_\mu}^0$, on peut dire que Ψ est une intégrale de S′, analytique en $x_1^0, \ldots, x_m^0$ et se réduisant, en $x_{\alpha_1}^0, \ldots, x_{\alpha_\mu}^0$, à la fonction $\psi(x_{\beta_1}, \ldots)$ qui est elle-même analytique en $x_{\beta_1}^0, \ldots$

Inversement, cherchons à définir une intégrale de S′, analytique en $x_1^0, \ldots, x_m^0$, et se réduisant en $x_{\alpha_1}^0, \ldots, x_{\alpha_\mu}^0$ à la fonction $\psi(x_{\beta_1}, \ldots)$. Les valeurs en $x_1^0, \ldots, x_m^0$ de z et de ses dérivées $p_{\beta_1}, \ldots$, calculées au moyen de ψ, sont précisément $z^0, p_{\beta_1}^0, \ldots$, et, d'après ce que nous avons vu, les fonctions $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_\mu}$ sont analytiques en $x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, p_{\beta_1}^0, \ldots$; de sorte que, par l'application rigoureuse du théorème de Cauchy généralisé, on peut affirmer que S′ possède une intégrale analytique et une seule ayant la fonction initiale ψ. L'intégrale ainsi calculée est donc identique à Ψ.

L'intégrale Ψ étant une intégrale donnée par le théorème de Cauchy, n'est pas singulière. Nous en tirons cette conclusion : *Pour qu'une intégrale soit singulière, il faut et il suffit qu'elle annule identiquement tous les déterminants* δ, en faisant toutefois la restriction que les équations du premier ordre

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \delta_\nu = 0$$

ne soient pas toutes des conséquences algébriques des équations du système $\mathcal{S}$, de façon que celui-ci possède des intégrales *non singulières*. D'ailleurs, ce fait ne peut, en général, se présenter que pour des équations dont les premiers membres sont des puissances de certaines fonctions. En simplifiant les équations, on le fera disparaître. Nous arrivons ainsi à ce théorème :

Les solutions singulières du système

$$(\mathcal{S}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_\mu = 0$$

supposé tel que les équations $[F_i, F_j]$ *en soient des conséquences algébriques, sont les intégrales du système du premier ordre*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_\mu = 0,$$

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \delta_\nu = 0.$$

Supposons qu'on cherche à mettre ce système sous forme canonique. Il pourra se présenter trois cas.

S'il est incompatible, c'est que $\mathcal{S}$ n'a pas de solutions singulières.

S'il s'intègre algébriquement, c'est que $\mathcal{S}$ a une ou un nombre limité d'intégrales singulières.

Enfin, s'il se ramène à un système canonique $\mathcal{S}_1$, c'est que $\mathcal{S}$ aura une infinité d'intégrales singulières qu'on obtiendra en cherchant toutes les intégrales analytiques de $\mathcal{S}_1$.

Mais $\mathcal{S}_1$ peut avoir à son tour des intégrales analytiques singulières fournies par un système $\mathcal{S}_2$ obtenu en ajoutant à $\mathcal{S}_1$

des équations analogues aux équations δ. Ensuite S_2 pourra, à son tour, avoir aussi des intégrales singulières, de sorte que S pourra avoir :

Des intégrales *simplement singulières,* qui seront des intégrales non singulières de S_1;

Des intégrales *doublement singulières,* qui seront simplement singulières pour S_1 et non singulières pour S_2; et ainsi de suite.

On trouve ainsi, au plus, $m - \mu + 1$ catégories d'intégrales singulières, car on passe de S à S_1 en lui ajoutant des équations δ qui ne sont pas toutes des conséquences algébriques des équations de S; on a ainsi au moins $\mu + 1$ équations distinctes; en mettant sous forme canonique, on ne pourra qu'ajouter de nouvelles équations, de sorte que S_1 aura au moins $\mu + 1$ équations distinctes.

Il en sera de même chaque fois qu'on passera d'un système au suivant, de sorte qu'au bout de $m - \mu + 1$ telles opérations, au plus, on aura un système qui sera composé d'au moins $m + 1$ équations distinctes, c'est-à-dire sera incompatible ou s'intégrera algébriquement et, pour lui, il n'y a plus de distinction possible de ses intégrales en singulières et non singulières.

Pour donner un exemple d'intégrales singulières des diverses catégories, considérons l'équation à trois variables

$$(S) \quad \ldots\ldots \quad p_3^2 - (p_2^2 - p_1^3)^3 = 0;$$

les équations δ sont ici

$$p_3 = 0, \quad (p_2^2 - p_1^3) p_2 = 0, \quad (p_2^2 - p_3)^3 p_1 = 0.$$

En les ajoutant à l'équation donnée, on a un système qui se décompose en deux autres

$$p_3 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_1 = 0$$

et

$$(S_1) \quad \ldots\ldots \quad p_3 = 0, \quad p_2^2 - p_1^3 = 0.$$

Comme les solutions du premier sont solutions du second, nous pouvons nous borner à celui-ci. Il y a des intégrales qui dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable et qui sont des intégrales simplement singulières de l'équation donnée. Mais il a aussi des intégrales singulières, car les équations ∂ correspondantes sont

$$(S_2) \quad \ldots \ldots \quad p_3 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_1 = 0.$$

Comme les équations S_1 en sont des conséquences algébriques, on a ainsi S_2 qui admet l'intégrale générale $z = c^{te}$. Ces intégrales sont doublement singulières pour S.

Revenons aux intégrales non singulières d'un système canonique. Si Ψ est une telle intégrale, on pourra trouver un élément $x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, p_1^0, \ldots, p_m^0$ tel que S soit résoluble par rapport à μ dérivées, $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, par exemple, et donne des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ analytiques en $x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, p_{\mu+1}^0, \ldots, p_m^0$.

Soit $\psi(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$ la fonction initiale de Ψ et soit $\chi(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$ une fonction de $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$ et de ν constantes arbitraires assujettie à la seule condition d'être analytique en $x_{\mu+1}^0, \ldots, x_m^0, a_1^0, \ldots, a_\nu^0$ et de s'annuler identiquement pour $a_1 = a_1^0, \ldots, a_\nu = a_\nu^0$.

Dans S, considérons, comme des variables, non plus seulement les x mais aussi les a et appliquons le théorème de Cauchy généralisé ; il existera une intégrale

$$\Psi'(x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_\nu)$$

analytique en $x_1^0, \ldots, x_m^0, a_1^0, \ldots, a_\nu^0$ et se réduisant en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$ à la fonction $\psi + \chi$.

Si on donne aux a leurs valeurs initiales, Ψ' vient se confondre avec Ψ et, de ce que Ψ' est non seulement une fonction analytique des x mais aussi des a, résulte, qu'étant donné à l'avance un nombre α, on pourra trouver des nombres $r_1\, r_2, \ldots,$

$r_m, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, tels que pour toutes les valeurs des x et des a satisfaisant aux inégalités

$$|x_1 - x_1^0| < r_1, \ldots, |x_m - x_m^0| < r_m$$
$$|a_1 - a_1^0| < \rho_1, \ldots, |a_\nu - a_\nu^0| < \rho_\nu$$

on ait toujours

$$|\Psi' - \Psi| < \alpha.$$

C'est ce que nous exprimerons en disant que l'intégrale Ψ' est infiniment voisine de l'intégrale Ψ. Ainsi, toute intégrale non singulière possède des intégrales infiniment voisines.

Si une intégrale n'en possède pas, elle est forcément singulière.

Cette condition est suffisante mais non nécessaire.

Par exemple, si le système S possède des intégrales doublement singulières, le système S_1 qui admet des intégrales dépendant d'arbitraires a pour intégrales non singulières les intégrales simplement singulières de S, celles-ci possèdent donc des intégrales infiniment voisines.

23. *Transformation d'un système où figure la fonction inconnue en un autre où elle ne figure pas.* — On emploie pour cela l'artifice suivant : On considère l'inconnue z comme déterminée par une équation

$$\zeta(x_1, \ldots, x_m, z) = 0$$

et alors le problème revient à déterminer la fonction ζ des $m+1$ variables $x_1, \ldots, x_m$, z de façon que l'équation obtenue en l'égalant à zéro donne une fonction z qui soit une intégrale du système proposé.

Convenons de désigner par $P_1, \ldots, P_m$, P_0 les dérivées de ζ par rapport à $x_1, \ldots, x_m, z$. Les dérivées de la fonction z, déduite de l'équation $\zeta = 0$, seront

$$p_1 = -\frac{P_1}{P_0}, \quad p_2 = -\frac{P_2}{P_0}, \quad \ldots, \quad p_m = -\frac{P_m}{P_0},$$

en supposant que dans $P_1, \ldots, P_m$, P_0 on ait remplacé z par sa valeur.

Soit

$$F(x_1, \ldots, x_m, z, p_1, \ldots, p_m) = 0$$

une équation que doit vérifier z, on devra avoir

$$F\left(x_1, \ldots, x_m, z, -\frac{P_1}{P_0}, \ldots, -\frac{P_m}{P_0}\right) = 0$$

et cette équation devra être vérifiée en vertu de $\zeta = 0$.

Pour l'instant, en ne tenant plus compte de la signification de ζ, considérons cette équation comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre à $m+1$ variables indépendantes $x_1, \ldots, x_m, z$ et à l'inconnue ζ, et remarquons tout de suite que cette inconnue n'y figure pas.

Pour abréger, désignons-la par F′ et appelons-la : *transformée de* F.

Soient deux équations $F = 0$, $\Phi = 0$, et leurs transformées F' et Φ'.

On a

$$[F, \Phi] = \sum_{i=1}^{i=m} \left[\frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]$$

et

$$(F', \Phi') = \sum_{i=1}^{i=m} \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\frac{1}{P_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{1}{P_0}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{P_i}{P_0^2} - \frac{\partial F}{\partial z}\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{P_i}{P_0^2},$$

dans la seconde formule, on convient qu'après avoir pris les dérivées $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}$, on y remplacera p_i par $-\frac{P_i}{P_0}$.

En adoptant complètement cette convention, on voit qu'on pourra écrire

$$P_0(F', \Phi') = \sum_{i=1}^{i=m} \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\sum_{i=1}^{i=m} p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\sum_{i=1}^{i=m} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i},$$

ou, plus simplement,

$$P_0(F', \Phi') = -[F, \Phi],$$

ce qui montre que *l'équation d'intégrabilité fournie par les transformées* F′ *et* Φ′ *de deux équations* F *et* Φ *est la transformée de l'équation d'intégrabilité fournie par ces deux équations.*

Si, en outre, on remarque que des équations distinctes donnent des transformées distinctes, puisque, au point de vue algébrique, on ne fait que changer le nom de certaines quantités appelées primitivement p_i et maintenant $-\frac{P_i}{P_0}$, on voit nettement qu'étant donné un système quelconque s et son transformé s', la réduction de ces deux systèmes à leurs formes canoniques se fera parallèlement ; à chaque instant, les équations obtenues pour le second seront les transformées des équations obtenues pour le premier; au moment où, pour l'un d'eux, les conditions d'intégrabilité seront vérifiées, il en sera de même pour l'autre.

Si S et S′ sont les deux formes canoniques, on pourra, pour trouver S′, partir de s, commencer à former les équations d'intégrabilité qu'on doit lui ajouter, puis, à un moment quelconque, faire la transformation et continuer, à partir de ce moment, à former les équations d'intégrabilité sur le système transformé, on arrivera toujours au même système S′.

En particulier, S′ sera le système transformé du système canonique S.

Considérons un système canonique S

$$(\mathrm{S}) \quad \ldots \quad \begin{cases} p_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m), \\ p_2 = f_2(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_\mu = f_\mu(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m). \end{cases}$$

Le système transformé sera

$$(\mathrm{S}) \quad . \quad \begin{cases} \mathrm{P}_1 = -\mathrm{P}_0 f_1\left(x_1, \ldots, x_m, z, -\frac{\mathrm{P}_{\mu+1}}{\mathrm{P}_0}, \ldots, -\frac{\mathrm{P}_m}{\mathrm{P}_0}\right), \\ \mathrm{P}_2 = -\mathrm{P}_0 f_2\left(x_1, \ldots, x_m, z, -\frac{\mathrm{P}_{\mu+1}}{\mathrm{P}_0}, \ldots, -\frac{\mathrm{P}_m}{\mathrm{P}_0}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{P}_\mu = -\mathrm{P}_0 f_\mu\left(x_1, \ldots, x_m, z, -\frac{\mathrm{P}_{\mu+1}}{\mathrm{P}_0}, \ldots, -\frac{\mathrm{P}_m}{\mathrm{P}_0}\right); \end{cases}$$

il est résolu par rapport à μ dérivées et, comme nous venons de le montrer, il est certainement canonique.

On peut aller encore plus loin. Considérons les réduites R et R' de S et de S' (§ 19). Dans les deux cas, il faudra prendre les nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ définies par

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \quad \ldots, \quad x_\mu = x_\mu^0 + y_1 y_\mu$$

et conserver les autres variables, c'est-à-dire $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$ pour S et $x_{\mu+1}, \ldots, x_m, z$ pour S'.

L'équation R sera

$$\begin{aligned} q_1 = f_1(y_1, \ldots\ldots, y_m, z, q_{\mu+1}, \ldots, q_m) \\ + y_2 f_2(y_1, \ldots, y_m, z, q_{\mu+1}, \ldots, q_m) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + y_\mu f_\mu(y_1, \ldots, y_m, z, q_{\mu+1}, \ldots, q_m) \end{aligned}$$

et l'équation R' sera

$$\begin{aligned} Q_1 = -Q_0 f_1\left(y_1, \ldots\ldots, y_m, z, -\frac{Q_{\mu+1}}{Q_0}, \ldots, -\frac{Q_m}{Q_0}\right) \\ - y_2 Q_0 f_2\left(y_1, \ldots, y_m, z, -\frac{Q_{\mu+1}}{Q_0}, \ldots, -\frac{Q_m}{Q_0}\right) \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - y_\mu Q_0 f_\mu\left(y_1, \ldots, y_m, z, -\frac{Q_{\mu+1}}{Q_0}, \ldots, -\frac{Q_m}{Q_0}\right). \end{aligned}$$

On constate que R' est la transformée de R, d'où cette conclusion :

Quel que soit le degré de réduction auquel on veut ramener un système, le changement qui fait disparaître la fonction inconnue peut être fait à un moment quelconque, le résultat est toujours le même.

Arrivons maintenant aux relations entre les intégrales d'un système S et celles de son transformé S'.

Pour que

$$\zeta(x_1, \ldots, x_m, z) = 0$$

donne une intégrale de S, il faut et il suffit que les équations S′ deviennent des identités en vertu de $\zeta = 0$. Il en sera certainement ainsi, si ζ vérifie S′ quelles que soient $x_1, x_2, \ldots, x_m, z$, c'est-à-dire si ζ est une intégrale de S′.

Cherchons si, de cette façon, on peut retrouver toutes les intégrales de S.

Soit Ψ une intégrale de S possédant des intégrales infiniment voisines; comme il a été montré dans le paragraphe précédent, il sera possible de trouver une famille d'intégrales, dépendant d'une constante arbitraire a et donnant Ψ pour une valeur particulière de cette constante, par exemple pour $a = 0$.

Soit

$$z = Z(x_1, \ldots, x_m, a)$$

l'expression générale de ces intégrales et

$$\zeta(x_1, \ldots, x_m, z) - a = 0$$

la même équation résolue par rapport à a.

L'équation $\zeta - a = 0$ donnant par sa résolution une intégrale de S, en portant $\zeta - a$ dans S′ on devra avoir des équations qui devront se réduire à des identités quand on y remplacera z par Z.

Mais $\zeta - a$ et ζ ont les mêmes dérivées, de sorte qu'en portant $\zeta - a$ dans S′ on a le même résultat qu'en portant ζ et que ce résultat ne contient pas a. Les équations obtenues sont de la forme

$$U(x_1, \ldots, x_m, z) = 0.$$

Je dis qu'elles sont des identités. Il suffit, pour le montrer, de faire voir qu'étant donné à l'avance un système quelconque de valeurs $x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0$, ce système vérifie $U = 0$.

Par hypothèse on a, quelles que soient $x_1, \ldots, x_m, a$,

$$U[x_1, \ldots, x_m, Z(x_1, \ldots, x_m, a)] = 0;$$

donnons à $x_1, \ldots, x_m$ les valeurs $x_1^0, \ldots, x_m^0$ et à a la valeur

$$a^0 = \zeta(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0),$$

Z prendra la valeur z^0 et l'on aura bien

$$U(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0) = 0.$$

Nous obtenons alors ce résultat :

Toute intégrale non singulière de S *peut s'obtenir en égalant à* 0 *une intégrale convenable du système transformé* S'.

D'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, s'il existe plusieurs catégories d'intégrales singulières, on obtiendra, au moyen de S', toutes les catégories, sauf peut-être la dernière.

En dernier lieu, supposons qu'on veuille traiter le problème de Cauchy pour S, c'est-à-dire chercher l'intégrale Θ ayant pour fonction initiale $\theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$. Il nous faudra chercher une intégrale Φ du système transformé S', telle que

$$\Phi\left[x_1^0, \ldots, x_\mu^0, x_{\mu+1}, \ldots, x_m, \theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)\right] = 0.$$

Soit $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, z)$ une fonction s'annulant identiquement pour $z = \theta$; on pourra prendre pour Φ l'intégrale de S' qui aura pour fonction initiale φ. On a ainsi une infinité d'intégrales de S' fournissant l'intégrale Θ de S. Ce fait s'explique aisément, en remarquant que les intégrales de S' dépendent d'une fonction arbitraire de $m - \mu + 1$ variables, tandis que celles de S dépendent seulement d'une fonction arbitraire de $m - \mu$ variables.

La manière la plus simple d'obtenir l'intégrale Θ sera évidemment de chercher l'intégrale Φ qui a pour fonction initiale $z - \theta$. C'est ce que nous avons fait dans le cas d'une équation linéaire (§ 6).

Nous avons vu que la transformation qui fait disparaître

l'inconnue peut se faire à un moment quelconque de la réduction à la forme canonique. Dans la pratique, il vaut mieux ne la faire qu'au moment où l'on est arrivé à cette forme canonique; cela vient de ce qu'un système ne contenant pas l'inconnue est incompatible ou canonique. Si S' est canonique, il en est de même de S, mais si S' est incompatible, c'est que S est incompatible ou s'intègre algébriquement. Sur S' cette distinction disparait. Comme les calculs de réduction sont exactement les mêmes avant ou après la disparition de l'inconnue, il vaut mieux les faire avant, de façon à obtenir l'intégration algébrique si elle se présente.

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DES SYSTÈMES CANONIQUES LINÉAIRES.

24. *Réduction à une seule équation linéaire.*

Je ne ferai que signaler la proposition suivante :

L'intégration d'un système canonique linéaire de μ *équations à* m *variables peut se ramener à l'intégration successive de* μ *équations linéaires du premier ordre, à* $m - \mu + 1$ *variables,* qui n'est qu'un cas particulier de la proposition générale du § 18. Comme on sait intégrer une équation linéaire au moyen d'équations différentielles ordinaires, on a ainsi une méthode d'intégration des systèmes canoniques linéaires par des équations différentielles ordinaires. Cette méthode exigera des opérations successives d'ordres

$$m - \mu + 1, \dots, 2, 1, \quad m - \mu + 1, \dots, 2, 1, \dots, \quad m - \mu + 1, \dots, 2, 1.$$

Si z ne figure pas dans S, les équations linéaires à intégrer seront homogènes et ne contiendront pas z, de sorte que les opérations successives seront d'ordres

$$m - \mu, \dots, 2, 1, \quad m - \mu, \dots, 2, 1, \dots, \quad m - \mu, \dots, 2, 1.$$

On obtient un procédé beaucoup plus simple et qui est dû à Mayer en appliquant la propriété générale du § 19.

Le système S étant linéaire, sa réduite R sera également linéaire, ce qui donne, en se rappelant les définitions des intégrales Θ d'une réduite R :

Théorème. — *L'intégration d'un système canonique linéaire se ramène à la recherche des intégrales* Θ *d'une équation linéaire.*

25. *Cas des systèmes jacobiens.* — R est alors une équation linéaire et homogène ne contenant pas z, soit

$$\text{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad q_1 = \text{A}_{\mu+1} q_{\mu+1} + \cdots + \text{A}_m q_m.$$

On aura (§ 4) à intégrer le système

$$r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dy_1}{-1} = \frac{dy_{\mu+1}}{\text{A}_{\mu+1}} = \cdots = \frac{dy_m}{\text{A}_m}.$$

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m-\mu}$ ses $m - \mu$ intégrales distinctes. Les intégrales particulières $\Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m$ qui se réduisent respectivement à $y_{\mu+1}, \ldots, y_m$ pour $y_1 = 0$ seront obtenues en résolvant le système

$$\begin{aligned}
\Phi_1 \quad &= \Phi_1(0, y_2, \ldots\ldots, y_\mu, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m), \\
\Phi_2 \quad &= \Phi_2(0, y_2, \ldots\ldots, y_\mu, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi'_{m-\mu} &= \Phi_{m-\mu}(0, y_2, \ldots, y_\mu, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m).
\end{aligned}$$

En refaisant le changement inverse de variables, $\Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m$ deviendront les intégrales de $\mathcal{S}$ qui se réduisent respectivement à $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$ en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$ et l'intégrale Θ qui a pour fonction initiale $\theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$ sera alors

$$\Theta = \theta(\Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m).$$

En résumé, nous obtenons le résultat suivant :

L'intégration d'un système jacobien de μ *équations à* m *variables se ramène à celle d'un système de* m — μ *équations différentielles ordinaires du premier ordre.*

Et cette intégration exige des opérations successives d'ordres

$$m - \mu, \quad m - \mu - 1, \quad \ldots, \quad 3, 2, 1.$$

Soient $\psi_1, \ldots, \psi_{m-\mu}$, $m - \mu$ fonctions *distinctes* de $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$; soient $\Psi_1, \ldots, \Psi_{m-\mu}$, les $m - \mu$ intégrales de $\mathcal{S}$ qui ont $\psi_1, \ldots, \psi_{m-\mu}$, comme fonctions initiales. Ces $m - \mu$ intégrales sont

forcément distinctes, car s'il existait entre elles une relation, qu'on pourrait mettre sous la forme

$$\Psi_1 = U(\Psi_2, \ldots, \Psi_{m-\mu}),$$

il en résulterait, en y faisant $x_1 = x_1^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$,

$$\psi_1 = U(\psi_2, \ldots, \psi_{m-\mu})$$

et les fonctions ψ ne seraient pas distinctes. Donc :

Un système jacobien admet toujours m — μ *intégrales distinctes.*

Réciproquement, soient $\Psi_1, \ldots, \Psi_{m-\mu}$, $m - \mu$ intégrales distinctes, leurs fonctions initiales en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$ sont forcément distinctes, car si elles ne l'étaient pas, il y aurait entre elles une relation de la forme

$$\psi_1 = U(\psi_2, \ldots, \psi_{m-\mu}),$$

la fonction

$$U(\Psi_2, \ldots, \Psi_{m-\mu})$$

serait une intégrale de S, à cause de la forme linéaire et homogène de toutes ses équations, et elle se réduirait en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$ à ψ_1, ce serait donc Ψ_1, de sorte que les intégrales Ψ ne seraient pas distinctes.

Soit alors Ψ une autre intégrale de S. Puisque $\psi_1, \ldots, \psi_{m-\mu}$ sont distinctes, sa fonction initiale ψ pourra s'exprimer au moyen de $\psi_1, \ldots, \psi_{m-\mu}$

$$\psi = V(\psi_1, \ldots, \psi_{m-\mu}),$$

la fonction

$$V(\Psi_1, \ldots, \Psi_{m-\mu})$$

sera une intégrale de S, se réduisant, en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$, à ψ, c'est donc Ψ, de sorte que :

Un système jacobien ne peut avoir plus de m — μ *intégrales distinctes.*

$\Psi_1, \ldots, \Psi_{m-\mu}$ étant $m - \mu$ intégrales distinctes quelconques, on pourra donc dire que l'intégrale générale du système S est

$$V(\Psi_1, \ldots, \Psi_{m-\mu}),$$

V étant une fonction arbitraire.

26. *Réduction quand on connaît déjà des intégrales.*

Supposons qu'on connaisse d'avance ν intégrales particulières et distinctes du système jacobien S. Soient $\Psi_1, \ldots, \Psi_\nu$. On pourra trouver $m - \nu$ autres fonctions $\Psi_{\nu+1}, \ldots, \Psi_m$, formant avec les ν premières un système de m fonctions distinctes.

En faisant le changement de variables

$$\Psi_1 = x'_1, \ \ldots, \ \Psi_\nu = x'_\nu, \ \Psi_{\nu+1} = x'_{\nu+1}, \ \ldots, \ \Psi_m = x'_m,$$

le système S se transformera en un autre système qui, résolu, sera encore jacobien (§ 13) et qui admettra les intégrales $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\nu$; il n'y figurera pas les dérivées de l'inconnue par rapport à ces variables, de sorte que, pour l'intégrer, on pourra considérer $x'_1, \ldots, x'_\nu$ comme des constantes. Le système transformé sera un système jacobien de μ équations à $m - \nu - \mu$ variables, son intégration se fera au moyen d'un système de $m - \nu - \mu$ équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire par des opérations successives d'ordres

$$m - \nu - \mu, \quad m - \nu - \mu - 1, \quad \ldots, \quad 3, 2, 1.$$

On peut d'ailleurs considérer la réduction d'une autre façon, car $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_\nu$ donnent, après y avoir fait le changement de variables de Mayer, ν intégrales distinctes du système r que l'on a à intégrer. Connaissant déjà ν intégrales de r, son intégration s'achève, comme on sait, par des opérations successives d'ordres

$$m - \nu - \mu, \quad m - \nu - \mu - 1, \quad \ldots, \quad 3, 2, 1.$$

27. *Cas des systèmes linéaires quelconques.*

Ce cas se ramène immédiatement au cas des systèmes jacobiens, car si

$$(S) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} p_1 = C^1_{\mu+1} p_{\mu+1} + \cdots + C'_m p_m + D_1, \\ p_2 = C^2_{\mu+1} p_{\mu+1} + \cdots + C^2_m p_m + D_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_\mu = C^\mu_{\mu+1} p_{\mu+1} + \cdots + C^\mu_m p_m + D_\mu \end{cases}$$

est un système linéaire et canonique, le système

$$(S') \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} P_1 = C^1_{\mu+1} P_{\mu+1} + \cdots + C^1_m P_m - D_1 P_0, \\ P_2 = C^2_{\mu+1} P_{\mu+1} + \cdots + C^2_m P_m - D_2 P_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_\mu = C^\mu_{\mu+1} P_{\mu+1} + \cdots + C^\mu_m P_m - D_\mu P_0, \end{cases}$$

obtenu en faisant disparaître l'inconnue, est certainement jacobien d'après ce qui a été dit au § 23.

Il faudra former la réduite R′ de S′, soit

$$(R') \quad . \quad . \quad . \quad Q_1 = A_{\mu+1} Q_{\mu+1} + \cdots + A_m Q_m - B Q_0,$$

et intégrer le système

$$(r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dy_1}{-1} = \frac{dy_{\mu+1}}{A_{\mu+1}} = \cdots = \frac{dy_m}{A_m} = \frac{dz}{-B}.$$

Au moyen de $m - \mu + 1$ intégrales distinctes, on formera les $m - \mu + 1$ intégrales remarquables $\Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m, \Theta_0$ ayant pour fonctions initiales $y_{\mu+1}, \ldots, y_m, z$, on y fera le changement inverse de variables et l'intégrale ayant pour fonction initiale $\theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$ s'obtiendra en résolvant l'équation

$$\Theta_0 = \theta(\Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m).$$

On arrive au même résultat en traitant le problème directe-

ment. En effet, formons directement la réduite R de S; ce sera une équation linéaire qui, par la transformation qui fait disparaître l'inconnue, devra donner R' (§ 23); ce sera donc

$$(\mathrm{R}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad q_1 = A_{\mu+1}q_{\mu+1} + \cdots + A_m q_m + B.$$

Pour l'intégrer, il faudra prendre, comme on sait, le système différentiel

$$\frac{dy_1}{-1} = \frac{dy_{\mu+1}}{A_{\mu+1}} = \cdots = \frac{dy_m}{A_m} = \frac{dz}{-B},$$

qui est r.

En appliquant à la recherche des intégrales Θ de R ce qui a été dit au § 7, on retrouve les résultats précédents. On peut donc se dispenser de passer par l'intermédiaire du système jacobien S'.

Cependant, dans des cas particuliers, il peut quelquefois y avoir avantage à former S'. Cela provient de ce que la connaissance d'une intégrale de S ne permet pas de simplifier son intégration, car cette intégrale ne fournit pas une intégrale de S' et il peut arriver que l'on aperçoive immédiatement des intégrales de S', ce qui permet de réduire le nombre des opérations nécessaires pour arriver à l'intégration complète de ce système.

28. — *Théorème de Mayer sur la recherche d'une seule intégrale d'un système jacobien.*

Soit S un système jacobien, S_1 le système obtenu en faisant le changement de variables de Mayer (§ 17) et r le système d'équations différentielles ordinaire auquel se ramène l'intégration de S_1.

Trouver une intégrale de S, c'est trouver une intégrale de S_1; soient $\Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m$ les $m - \mu$ intégrales remarquables de S_1 et $\Phi = c^{te}$ une intégrale quelconque de r. Φ est une intégrale de la réduite R; comme elle a pour fonction initiale $\Phi(o, y_2, \ldots, y_m)$, on a (§ 4) :

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \Phi(0, y_2, \ldots, y_\mu, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_m).$$

Φ contient, au moins, une des variables $y_{\mu+1}, \ldots, y_m$, donc de l'équation précédente on pourra tirer un des Θ, par exemple

$$\Theta_m = V_m(y_1, y_2, \ldots, y_m, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_{m-1}).$$

Si V_m ne contient aucun Θ, on a ainsi Θ_m.

Supposons que V_m contienne des Θ. Portons V_m dans S_1. Si, pour abréger, on désigne par $Y_1(z), \ldots, Y_\mu(z)$ les premiers membres des équations de ce système, on obtiendra des équations qui, par suite de la forme linéaire et homogène des Y, pourront s'écrire

$$\frac{\partial V_m}{\partial y_1} Y_i(y_1) + \cdots + \frac{\partial V_m}{\partial y_m} Y_i(y_m) + \frac{\partial V_m}{\partial \Theta_{\mu+1}} Y_i(\Theta_{\mu+1}) + \cdots + \frac{\partial V_m}{\partial \Theta_m} Y_i(\Theta_m) = 0$$

et les Θ étant solutions de S_1, elles se réduiront à

$$\frac{\partial V_m}{\partial y_1} Y_i(y_1) + \cdots + \frac{\partial V_m}{\partial y_m} Y_i(y_m) = 0,$$

c'est-à-dire à la forme

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_m, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_{m-1}) = 0.$$

Chacune d'elles contient des Θ ou se réduit à une identité, sans quoi ce serait une relation entre les variables indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Si elles ne se réduisent pas toutes à des identités, il y aura certainement l'une d'elles d'où l'on pourra tirer un Θ, soit

$$\Theta_{m-1} = V_{m-1}(y_1, y_2, \ldots, y_m, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_{m-2})$$

et, sur V_{m-1}, on recommencera les mêmes raisonnements que sur V_m; et ainsi de suite.

Il ne peut alors se présenter que deux hypothèses.

Supposons qu'on n'arrive jamais à une fonction V qui, substi-

tuée dans S_1, ne donne jamais que des identités. En poussant les opérations précédentes suffisamment loin, on arrivera forcément à une fonction V_{m-i} ne contenant aucun Θ, puisque la dernière que l'on pourrait ainsi obtenir, et qui serait $V_{\mu+1}$, ne peut évidemment pas en contenir.

On aura immédiatement l'expression de Θ_{m-i} et, en remontant, celles de $\Theta_{m-i+1}, \ldots, \Theta_{m-1}, \Theta_m$.

En particulier, si l'on arrive jusqu'à $V_{\mu+1}$, on a les $m - \mu$ intégrales Θ et l'intégration du système est terminée.

Enfin, supposons qu'on arrive à une fonction

$$V_{m-i}(y_1, y_2, \ldots, y_m, \Theta_{\mu+1}, \ldots, \Theta_{m-i-1}),$$

qui, substituée dans S_1, ne donne que des identités. Comme ces équations sont obtenues en se servant uniquement de l'hypothèse que les Θ sont des solutions de S_1, il en résulte que V_{m-i} est une intégrale de S_1 quand on y remplace les Θ qui y figurent par des intégrales quelconques de S_1. Comme toute constante est une intégrale de S_1, on pourra dire que

$$V_{m-i}(y_1, y_2, \ldots, y_m, a_{\mu+1}, \ldots, a_{m-\mu-1}),$$

est une intégrale de S_1, quelles que soient les constantes a. Dans ce cas, on voit qu'on a une intégrale dépendant de constantes arbitraires.

Nous arrivons ainsi à ce théorème important :

La connaissance d'une seule intégrale du système Γ *permet de trouver toujours une intégrale, au moins, du système* S.

Dans la pratique, si la substitution d'une fonction V fournit plusieurs équations distinctes, on en tirera plusieurs Θ, ce qui donnera d'un seul coup plusieurs nouvelles fonctions V qu'on substituera à leur tour; celles qui donneront des identités fourniront des intégrales dépendant de constantes arbitraires et les résultats de substitution des autres donneront des équations permettant de tirer de nouveaux Θ, et ainsi de suite.

Si l'on connaît plusieurs intégrales Φ du système r, on aura, au début, plusieurs équations distinctes entre les Θ, de sorte que le calcul pourra exiger moins d'opérations si l'on part simultanément de ces différentes intégrales.

29. *Application du théorème de Mayer aux systèmes linéaires non jacobiens.*

Soit S' le système jacobien auquel on ramène S (§ 27).

Cherchons d'abord si S' peut admettre des solutions indépendantes de z.

Si ces solutions existent, elles devront vérifier les équations simultanées

$$P_i = C^i_{\mu+1} P_{\mu+1} + \cdots + C^i_m P_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

obtenues en faisant $P_0 = 0$ dans S'.

Supposons qu'il existe une telle solution autre qu'une constante, en la substituant dans les équations précédentes, on aura, entre $C^i_{\mu+1}, \ldots, C^i_m$, une relation linéaire à coefficients indépendants de z.

Il est donc nécessaire qu'il existe entre les coefficients C de chaque équation, au moins une relation linéaire à coefficients indépendants de z.

Supposons qu'il en existe plusieurs, elles permettront d'exprimer certains C_i en fonctions linéaires des autres et chacune des équations prendra la forme

$$\chi^i_0 + C^i_{\mu+1} \chi^i_1 + \cdots = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

Comme entre les C qui y figurent il ne peut exister aucune relation à coefficients indépendants de z, toute intégrale indépendante de z devra vérifier les équations simultanées

$$\chi^i_0 = 0, \quad \chi^i_0 = 0, \quad \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

où ne figure plus la variable z. Le système S' admettra des solutions indépendantes de z ou n'en admettra pas suivant, que ce

nouveau système linéaire et homogène aura ou n'aura pas de solutions autres qu'une constante.

Ce qui précède montre que si S est un système linéaire quelconque, le système S′ n'admettra pas de solutions indépendantes de z, de sorte que toute solution de S′ fera connaître une solution de S. Or, d'après le théorème de Mayer, toute intégrale de r fait connaître une intégrale, au moins, de S′, de sorte que :

Sauf pour certains systèmes linéaires satisfaisant à des conditions particulières, la connaissance d'une seule intégrale, absolument quelconque, de r, *permet sûrement de calculer une intégrale, au moins, du système* S.

Supposons maintenant que S′ ait des intégrales indépendantes de z; une intégrale de r, prise au hasard, fournira en général une ou plusieurs intégrales de S′ qui contiendront z, mais il pourra arriver qu'il existe certaines intégrales de r qui, par l'application du théorème de Mayer, ne fournissent, pour S′, que des intégrales indépendantes de z et, par conséquent, ne donnent pas d'intégrales de S. Alors il faudra nécessairement chercher une autre intégrale de r.

Par exemple, considérons le système canonique

$$p_1 = p_3 + z,$$

$$p_2 = p_3 + z + x_3;$$

la réduite R est ici, en prenant 0 et 0 comme valeurs initiales de x_1 et x_2,

$$q_1 = q_3(1 + y_2) + z(1 + y_2) + y_2 y_3$$

et le système r est

$$\frac{dy_1}{1} = \frac{dy_3}{-(1 + y_2)} = \frac{dz}{z(1 + y_2) + y_2 y_3}.$$

On en aperçoit immédiatement une intégrale

$$y_1(1 + y_2) + y_3 = \text{c}^{\text{te}}.$$

Mais la fonction $y_1(1+y_2)+y_3$, se réduit pour $y_1=0$, à y_3; c'est donc l'intégrale particulière Θ_3. En lui appliquant le théorème de Mayer, elle ne fournira jamais que Θ_3 et cette fonction ne contient pas z, de sorte qu'en prenant l'intégrale $y_1(1+y_2)+y_3$ du système r, la méthode de Mayer ne fournira aucune intégrale du système S. Il faut alors chercher une autre intégrale de σ. On trouve facilement

$$e^{y_3}\left[z+\frac{y_2}{1+y_2}(y_3-1)\right]=\mathrm{c^{te}}$$

qui donne

$$e^{y_3}\left[z+\frac{y_2}{1+y_2}(y_3-1)\right]=e^{\Theta_3}\left[\Theta_0+\frac{y_2}{1+y_2}(\Theta_3-1)\right]$$

en remplaçant Θ_3 par sa valeur connue, on obtient

$$\Theta_0=ze^{y_1(1+y_2)}+\frac{y_2}{1+y_2}\left[(y_3-1)\left(e^{y_1(1+y_2)}-1\right)-y_1(1+y_2)\right].$$

En revenant aux variables primitives, on aura donc

$$\Theta_3=x_1+x_2+x_3,$$

$$\Theta_0=ze^{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_2}\left[(x_3-1)\left(e^{x_1+x_2}-1\right)-(x_1+x_2)\right]$$

et l'intégrale générale sera donnée par

$$ze^{x_1+x_2}=x_2-x_2(x_3-1)\frac{e^{x_1+x_2}-1}{x_1+x_2}+\theta(x_1+x_2+x_3),$$

θ étant une fonction arbitraire.

CHAPITRE V.

INTÉGRATION DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES.

Intégrales complètes.

30. *Définition.* — Soit S un système canonique de μ équations à m variables. En se donnant une fonction initiale dépendant de $m - \mu + 1$ constantes arbitraires, on aura une intégrale dépendant de ces $m - \mu + 1$ constantes.

Supposons la déterminée par l'équation finie

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad V(x_1, \ldots, x_m, z, a_1, a_2, \ldots, a_{m-\mu+1}) = 0,$$

la fonction z tirée de cette équation doit vérifier S, quelles que soient les valeurs des a. Les dérivées sont données par

$$(2) \quad . \quad . \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Les équations (1) et (2) donnent les z et les p en fonction des x et des a et, par hypothèse, ces fonctions z et p vérifient les μ équations distinctes S, quelles que soient les valeurs des a.

Supposons que, parmi les $m + 1$ équations (1) et (2), il y en ait $m - \mu + 1$ qui soient résolubles par rapport aux a.

En portant les valeurs ainsi obtenues dans les μ équations restantes, on aura μ équations distinctes, vérifiées identiquement par z et les p, et il ne pourra pas y en avoir d'autres. Soit S_1 ce système; les équations S seront donc, forcément, des conséquences algébriques des équations S_1. Si la réciproque n'était pas vraie, le système S serait certainement *décomposable* en plusieurs systèmes parmi lesquels on trouverait S_1, de sorte que si, comme nous l'avons toujours fait, nous supposons que S est

indécomposable, les systèmes S et S_1 seront algébriquement équivalents. Donc :

S étant un système canonique de μ *équations à* m *variables, on appelle intégrale complète de* S *une équation*

$$V = 0$$

contenant les x, *l'inconnue* z *et* $m - \mu + 1$ *constantes arbitraires* a, *telle que la valeur de* z *que l'on en tire soit solution de* S, *quelles que soient les valeurs des* a *et que, parmi les* $m + 1$ *équations*

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

il y en ait $m - \mu + 1$ *qui soient résolubles par rapport aux* a.

Les équations S *sont le résultat de l'élimination algébrique des* a *entre ces* $m + 1$ *équations.*

31. *Recherche de toutes les intégrales au moyen d'une intégrale complète.*

S étant le résultat de l'élimination des a entre les équations (1) et (2), on peut dire que la condition nécessaire et suffisante pour que z soit une intégrale de S est que les équations (1) et (2), où l'on considère les a comme des inconnues, aient, au moins, un système de solutions, de sorte que le problème de l'intégration de S peut être transformé comme il suit :

Trouver des fonctions z, $a_1, \ldots, a_{m-\mu+1}$ *des variables* x *satisfaisant aux équations*

$$(3) \quad . \quad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

On peut éliminer les dérivées p de la fonction z en les tirant

de l'équation $V=0$, car celle-ci, dérivée successivement par rapport à toutes les variables, donne

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial V}{\partial z}+\sum\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_1}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_m}+p_m\frac{\partial V}{\partial z}+\sum\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_m}=0.$$

Si dans les m dernières équations (3) on remplace les p par leurs valeurs ainsi obtenues, on arrive au système

$$(4)\quad . \quad V=0,\quad \sum\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_1}=0,\quad \ldots,\quad \sum\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_m}=0,$$

équivalent au système (3).

Les m dernières équations (4) sont m équations linéaires et homogènes par rapport aux $m-\mu+1$ quantités

$$\frac{\partial V}{\partial a_1},\quad \ldots,\quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-\mu+1}}.$$

Elles seront certainement vérifiées en annulant toutes ces dérivées de V, c'est-à-dire en prenant z et les a satisfaisant à

$$V=0,\quad \frac{\partial V}{\partial a_1}=0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-\mu+1}}=0.$$

On aura l'inconnue z, qui seule nous intéresse, en éliminant $a_1, a_2, \ldots, a_{m-\mu+1}$ entre ces $m-\mu+2$ équations. La solution ainsi obtenue est appelée *intégrale singulière de Lagrange.*

Si l'on veut maintenant trouver d'autres solutions, il faut supposer que ces m équations linéaires et homogènes admettent des solutions où les inconnues ne sont pas toutes nulles. On pourra faire différentes hypothèses sur l'ordre du déterminant principal de ces équations, ce qui conduira à différentes classes d'intégrales.

Il est plus commode de procéder comme il suit : le système (4) peut s'écrire sous la forme

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V = 0, \qquad \sum \frac{\partial V}{\partial a} da = 0.$$

Si l'on suppose que les $\frac{\partial V}{\partial a}$ ne sont pas tous nuls, la seconde équation montre que les a ne sont pas des fonctions indépendantes, puisqu'il existe une relation entre leurs différentielles totales. Si, en effet, les a étaient des fonctions indépendantes, on pourrait faire un changement de variables dans lequel les a deviendraient des variables indépendantes, et les da, étant alors complètement arbitraires, ne pourraient vérifier aucune relation.

Il y a donc des relations entre les a. Pour prendre tout de suite le cas général, supposons qu'il y en ait k qui soient distinctes :

$$(6) \quad . \ \psi_1(a_1, \ldots, a_{m-\mu+1}) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k(a_1, \ldots, a_{m-\mu+1}) = 0.$$

On aura, entre les da, les k relations linéaires et homogènes

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial a_1} da_1 + \cdots + \frac{\partial \psi_1}{\partial a_{m-\mu+1}} da_{m-\mu+1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial \psi_k}{\partial a_1} da_1 + \cdots + \frac{\partial \psi_k}{\partial a_{m-\mu+1}} da_{m-\mu+1} = 0,$$

et il ne devra pas y en avoir d'autres, puisque, parmi les da, il doit en rester $m - \mu + 1 - k$ complètement arbitraires.

L'équation $\Sigma \frac{\partial V}{\partial a} da = 0$ devra donc en être une combinaison linéaire, ce qui donne

$$(7) \quad \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = \lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial a_1} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial \psi_k}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_{m-\mu+1}} = \lambda_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial a_{m-\mu+1}} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial \psi_k}{\partial a_{m-\mu+1}}, \end{array} \right.$$

les λ étant de nouvelles inconnues auxiliaires.

Nous aurons ainsi $m - \mu + 2 + k$ inconnues, z, a_1, ... $a_{m-\mu+1}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ satisfaisant aux $m - \mu + 2 + k$ équations (6), (7) et $V = 0$.

En éliminant les a et les λ, on aura l'équation donnant z et cette intégrale dépendra des fonctions ψ que l'on peut se donner arbitrairement.

En outre, on peut faire successivement

$$k = 1, 2, \dots, m - \mu + 1,$$

ce qui donnera $m - \mu + 1$ séries d'intégrales. La dernière série s'obtenant en établissant entre les a, $m - \mu + 1$ relations, redonne les intégrales complètes d'où l'on est parti, puisque les a sont alors des constantes.

32. *Solution du problème de Cauchy au moyen d'une intégrale complète.*

Une solution du système S est, comme nous venons de le voir, parfaitement déterminée quand on connait les relations

$$\psi_1 = 0, \quad \dots, \quad \psi_k = 0$$

qui lui correspondent.

Nous devons alors nous proposer de chercher quelles fonctions ψ il faut prendre pour obtenir l'intégrale, dont l'existence est démontrée par le théorème de Cauchy généralisé, et qui, en $x_1^0, \dots, x_\mu^0$ se réduit à $\theta(x_{\mu+1}, \dots, x_m)$.

Si z et les fonctions a sont déterminées par le procédé précédemment indiqué, les a, z et ses dérivées $p_1, \dots, p_m$ vérifient les équations (3) équivalentes aux équations (4).

Dans ces équations (3), faisons $x_1 = x_1^0, \dots, x_\mu = x_\mu^0$ et remarquons que $z, p_{\mu+1}, \dots, p_m$ se réduisent à

$$\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x_{\mu+1}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x_m};$$

la première et les $m-\mu$ dernières deviendront des relations entre $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$, et les valeurs initiales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-\mu+1}$ des a. Si, entre ces $m-\mu+1$ relations, on élimine les $m-\mu$ variables $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$, on obtiendra, au moins, une relation entre les α. Supposons qu'on en obtienne k :

$$\psi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-\mu+1}) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-\mu+1}) = 0.$$

Réciproquement, si, entre les valeurs initiales des a, existent ces k relations, l'intégrale z qui correspond à ces fonctions a se réduit bien à θ en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$.

On vérifie immédiatement ces relations entre les α en assujettissant les fonctions a à vérifier les équations

$$\psi_1(a_1, \ldots, a_{m-\mu+1}) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k(a_1, \ldots, a_{m-\mu+1}) = 0,$$

d'où cette règle :

Pour trouver l'intégrale qui a pour fonction initiale $\theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m)$, *on remplace* $x_1, \ldots, x_\mu, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m$ *respectivement par* $x_1^0, \ldots, x_\mu^0, \theta, \frac{\partial\theta}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial x_m}$, *dans les équations*

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_{\mu+1}} + p_{\mu+1}\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_m} + p_m\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

on élimine $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$ *et on obtient des relations*

$$\psi_1(a_1, \ldots, a_{m-\mu+1}) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k(a_1, \ldots, a_{m-\mu+1}) = 0.$$

Enfin, on élimine $a_1, \ldots, a_{m-\mu+1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *entre les équations*

$$V = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \psi_k = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial a_1} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial a_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_{m-\mu+1}} = \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial a_{m-\mu+1}} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial a_{m-\mu+1}}$$

et on obtient une équation de la forme

$$U(x_1, \ldots, x_m, z) = 0$$

qui, résolue, donne l'intégrale cherchée.

Nous pouvons maintenant énoncer cette proposition, qui est fondamentale :

L'intégration d'un système canonique peut être considérée comme terminée dès que l'on en connaît une intégrale complète, en entendant par là qu'à partir de ce moment il n'y aura plus à effectuer aucune intégration pour achever le problème.

33. *Remarque sur la transformation qui fait disparaître la fonction inconnue.* — Nous avons vu (§ 23) que la solution du problème de Cauchy pour le système S résultait immédiatement de la solution du même problème pour le système S'.

Supposons qu'on connaisse une intégrale complète de S'; d'après le paragraphe précédent, on saura traiter le problème de Cauchy pour S' et, par suite, pour S, de sorte que :

L'intégration du système S où figure l'inconnue z peut être considérée comme terminée dès que l'on connaît une intégrale complète du système transformé S'.

Méthode de Jacobi et Mayer.

34. *Théorèmes préliminaires.*

L'intégration d'un système non linéaire étant terminée dès qu'on en connaît une intégrale complète, la recherche d'une telle intégrale doit être le problème que nous devons nécessairement nous poser.

Reprenons le système canonique S :

$$(S) \quad \ldots \quad \begin{cases} p_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m), \\ p_2 = f_2(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_\mu = f_\mu(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m); \end{cases}$$

ajoutons-lui une équation complémentaire

$$E_{\mu+1} \quad . \quad . \quad . \quad p_{\mu+1} = f_{\mu+1}(x_1, \ldots, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m)$$

et écrivons que le système S_1 ainsi obtenu est canonique.

Il nous faut, pour cela, écrire que les équations du second ordre permettent de calculer toutes les dérivées

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \mu + 1 \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

et ne permettent de calculer aucune autre dérivée.

Les équations du second ordre fournies par les équations S permettent déjà de calculer toutes les dérivées

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \mu \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

et ne permettent de calculer rien de plus.

Enfin, les dérivées de l'équation complémentaire $E_{\mu+1}$ par rapport aux variables $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$ donneront les dérivées

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+1} \partial x_k} \qquad (k = \mu + 1, \ldots, m)$$

et, à ce moment, nous aurons toutes les dérivées secondes que nous devons obtenir. Les seules équations pouvant donner d'autres dérivées ne peuvent donc être que

$$\frac{\partial E_{\mu+1}}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial E_{\mu+1}}{\partial x_\mu} = 0.$$

Or l'équation $\frac{\partial E_{\mu+1}}{\partial x_i} = 0$ est résolue par rapport à une dérivée déjà obtenue au moyen de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu+1}}(p_i - f_i) = 0.$$

Il faudra égaler ces deux dérivées pour obtenir l'équation d'intégrabilité correspondante. Le calcul est analogue à celui qui a été fait au § 11 ; la seule différence provient de la présence de $p_{\mu+1}$ dans les équations S, mais l'équation d'intégrabilité se met toujours sous la forme

$$[p_i - f_i, p_{\mu+1} - f_{\mu+1}] = 0.$$

On aura ainsi les μ équations

$$[p_1 - f_1, p_{\mu+1} - f_{\mu+1}] = 0, \ldots, [p_\mu - f_\mu, p_{\mu+1} - f_{\mu+1}] = 0,$$

qui doivent se réduire à des identités en vertu des équations de S_1.

En y remplaçant alors, après les avoir développées, $p_1, \ldots, p_\mu, p_{\mu+1}$, respectivement par

$$\begin{array}{l} f_1 \;\; (x_1, \ldots, x_m, z, f_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_\mu \;\; (x_1, \ldots, x_m, z, f_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_m), \\ f_{\mu+1}(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m), \end{array}$$

elles constitueront un système linéaire et du premier ordre Σ_1, à l'inconnue $f_{\mu+1}$, et aux variables indépendantes $x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m$, système qui constitue la condition nécessaire et suffisante pour que S_1 soit canonique et qu'on aurait pu obtenir immédiatement au moyen du théorème général du § 14.

Nous allons maintenant montrer que Σ_1, *tel qu'il est obtenu, est canonique.*

Nous remarquerons que, d'après la forme même de Σ_1, ses équations sont résolues par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu},$$

de sorte qu'on aura démontré qu'il est canonique si l'on arrive

à prouver qu'il admet une intégrale se réduisant, en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$, à une fonction

$$U(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m)$$

arbitrairement donnée à l'avance.

Soit

$$\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_{m-\mu})$$

une fonction de $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$, dépendant en outre de $m - p$ constantes arbitraires, de telle façon que

$$\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\mu-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}$$

soient des fonctions *distinctes* de $a_1, \ldots, a_{m-\mu}$.

Soit I l'intégrale de S correspondant à cette fonction initiale. On aura, pour cette intégrale,

$$z = \Phi(x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_{m-\mu}), \quad p_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial\Phi}{\partial x_m}$$

et l'on sait d'avance qu'elle vérifie les équations S quelles que soient les valeurs des a.

Remarquons que $\Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial x_{\mu+2}}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_m}$, considérées comme fonctions des a, sont *distinctes*, car leur déterminant fonctionnel se réduit, en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$, à celui des fonctions $\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\mu+2}}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}$ qui, par hypothèse, n'est pas nul.

Des équations

$$z = \Phi, \quad p_{\mu+2} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_{\mu+2}}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial\Phi}{\partial x_m},$$

on pourra donc tirer les a, et en portant dans

$$p_{\mu+1} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_{\mu+1}},$$

on obtiendra une équation

$$p_{\mu+1} = \psi(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m)$$

qui sera encore identiquement vérifiée par I, quelles que soient les valeurs des a.

Ainsi cette intégrale I vérifie le système

$$p_1 = f_1, \quad \ldots, \quad p_\mu = f_\mu, \quad p_{\mu+1} = \psi,$$

et ce système, qui est compatible, est certainement *canonique*, car s'il ne l'était pas, il conduirait à des relations de la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m) = 0,$$

qui seraient encore vérifiées par I, ce qui voudrait dire que $\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mu+2}}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}$, considérées comme fonctions des a, ne seraient pas distinctes.

La fonction ψ est donc une intégrale de Σ_1.

On obtient ψ en éliminant $a_1, \ldots, a_{m-\mu}$ entre

$$z = \Phi, \quad p_{\mu+1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mu+1}}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}.$$

On aura donc la valeur de ψ en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$ en éliminant les a entre

$$z = \varphi, \quad p_{\mu+1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu+1}}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$$

et cette élimination conduira à

$$p_{\mu+1} = U(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m)$$

si l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu+1}} = U\left(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu+2}}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}\right),$$

équation du premier ordre en φ, qui, d'après le théorème de Cauchy, admet des intégrales dépendant d'autant de constantes

arbitraires que l'on veut. Par exemple, en prenant pour φ l'intégrale qui en $x^0_{\mu+1}$ se réduit à

$$a_1 + a_2(x_{\mu+2} - x^0_{\mu+2}) + \cdots + a_{m-\mu}(x_m - x^0_m),$$

on aura sûrement une intégrale φ satisfaisant aux conditions qui ont été imposées au début.

Le système Σ_1 possédant une intégrale ψ ayant la fonction initiale U, est donc canonique.

35. *Méthode de Jacobi et Mayer.*

Au système S, ajoutons l'équation complémentaire

$$p_{\mu+1} = f_{\mu+1}.$$

Nous aurons, pour déterminer $f_{\mu+1}$, un système Σ_1 qui est linéaire, canonique et formé de μ équations à $2m - \mu$ variables. On sera donc ramené à un système σ_1 de $2m - 2\mu + 1$ équations différentielles ordinaires.

D'après le théorème de Mayer (§§ 28 et 29), la connaissance d'une intégrale $\Phi_1 - a_1$ de ce système fournira, en général, une intégrale $f_{\mu+1}$ de Σ_1 et cette intégrale contiendra la constante a_1.

Au système S_1, ainsi obtenu, on appliquera le même procédé et on arrivera à un nouveau système d'équations différentielles ordinaires σ_2 dont il suffira, en général, de chercher une seule intégrale.

En passant de S à S_1 le nombre μ a augmenté d'une unité, de sorte que le nombre des équations du système σ, qui était $2m - 2\mu + 1$, a diminué de deux unités et cela se présentera chaque fois qu'on passera d'un système au suivant. Cela tient, en réalité, à ce que chaque fois qu'on passe d'un système Σ au suivant on a une équation de plus et une variable indépendante de moins.

Après avoir appliqué $m - \mu$ fois ce procédé, on arrive à un système $S_{m-\mu}$ de la forme

$$p_1 = f_1, \quad p_2 = f_2, \quad \ldots, \quad p_m = f_m,$$

dont les seconds membres contiennent $m - \mu$ constantes arbitraires et dont toute intégrale vérifie S quelles que soient ces constantes.

L'intégration de $S_{m-\mu}$ se ramène à celle d'une équation différentielle ordinaire, ce qui introduira encore une nouvelle constante arbitraire, et finalement nous obtiendrons l'équation

$$V(x_1, \ldots, x_m, z, a_1, \ldots, a_{m-\mu+1}) = 0,$$

donnant, pour S, une intégrale dépendant de $m - \mu + 1$ constantes arbitraires.

Pour montrer qu'on obtient ainsi une *véritable intégrale complète,* il faut montrer que, par l'élimination de ces constantes, on retrouve les équations S et *rien qu'elles,* c'est-à-dire que cette intégrale ne peut vérifier, quelles que soient les constantes a, aucune équation distincte des équations S.

Une telle équation se ramènerait, en effet, à la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m) = 0,$$

de sorte qu'on ne pourrait pas se donner arbitrairement les valeurs de $x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m$. Ceci est manifestement faux, car en se donnant à l'avance des valeurs de ces quantités, les équations

$$p_{\mu+1} = f_{\mu+1}, \quad \ldots, \quad p_m = f_m, \quad V = 0$$

déterminent forcément les valeurs correspondantes des a, puisque la première ne contient que a_1, que la seconde ne contient que a_1 et $a_2, \ldots$, l'avant-dernière ne contient que $a_1, a_2, \ldots, a_{m-\mu}$ et la dernière contient $a_1, a_2, \ldots, a_{m-\mu}, a_{m-\mu+1}$.

Ainsi la méthode de Jacobi et Mayer fournit sûrement une intégrale complète en effectuant des opérations successives qui, en général, sont d'ordres

$$2m - 2\mu + 1, \quad 2m - 2\mu - 1, \quad \ldots, \quad 5, 3, 1.$$

Dans la pratique, on prend toujours les équations complé-

mentaires sous forme non résolue. Par exemple, pour la première on prendra

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m) = a_1,$$

a_1 étant une constante arbitraire. On considérera les équations

$$[p_1 - f_1, \psi_1] = 0, \quad \ldots, \quad [p_\mu - f_\mu, \psi_1] = 0,$$

et, après les avoir développées, on y remplacera $p_1, \ldots, p_\mu$ respectivement par $f_1, \ldots, f_\mu$, ce qui donnera, pour déterminer ψ_1, un système linéaire et homogène où ψ_1 n'entrera que par ses dérivées. Ce système n'étant autre que Σ_1 dans lequel on aurait effectué la transformation qui fait disparaître l'inconnue, sera forcément jacobien. Il suffira d'en connaître une intégrale contenant, au moins, l'une des dérivées $p_{\mu+1}, \ldots, p_m$; on résoudra alors l'équation $\psi_1 - a_1 = 0$ par rapport à cette dérivée et l'on continuera à appliquer la méthode de la même façon.

36. *Cas où l'inconnue ne figure pas dans le système.*

Le premier système jacobien à intégrer est

$$[p_1 - f_1, \psi_1] = 0, \quad \ldots, \quad [p_\mu - f_\mu, \psi_1] = 0;$$

z ne figure pas dans ses coefficients, de sorte que si l'on ajoute l'équation

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0,$$

on aura de nouvelles équations d'intégrabilité qui seront linéaires et homogènes par rapport à des dérivées secondes prises toutes une fois, au moins, par rapport à z, c'est-à-dire se réduiront à des identités en vertu de l'équation

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0.$$

Ce nouveau système admet des intégrales pour lesquelles on

peut se donner arbitrairement les fonctions de $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$, $p_{\mu+1}, \ldots, p_m$ auxquelles elles se réduisent en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$, et ces intégrales ne dépendent pas de z. Comme elles vérifient le système qu'on obtient en supprimant $\frac{\partial \psi_1}{\partial z}$ dans Σ_1, c'est-à-dire le système

$$(p_1 - f_1, \psi_1) = 0, \quad \ldots, \quad (p_\mu - f_\mu, \psi_1) = 0,$$

on peut affirmer que ce dernier est jacobien.

En en prenant une intégrale dépendant d'une constante arbitraire absolue, c'est-à-dire ne dépendant pas de z, on aura une équation d'ordre $2m - 2\mu$.

S_1 étant encore composé d'équations où z ne figure pas, on pourra lui appliquer le même raisonnement. Les ordres des opérations successives seront tous diminués d'une unité, car dans chaque système dont il s'agira de chercher une intégrale, il y aura une variable en moins z.

Finalement on arrivera au système $S_{m-\mu}$ dont l'intégration se ramènera à celle d'une équation différentielle ordinaire où z ne figurera pas, c'est-à dire à une quadrature. En résumé :

Dans le cas des systèmes où z ne figure pas, la méthode de Jacobi et Mayer conduit sûrement à une intégrale complète en effectuant des opérations successives qui, en général, sont d'ordres

$$2m - 2\mu, \quad 2m - 2\mu - 2, \quad \ldots, \quad 4, 2, 1.$$

On pourrait ramener le cas général à ce cas particulier en se servant de ce qui a été dit aux §§ 23 et 33.

Le système canonique S de μ équations à m variables et où l'inconnue z figure, se ramène à un système S' de μ équations à $m + 1$ variables où l'inconnue ne figure pas.

La recherche d'une intégrale complète de S' exigera donc des opérations d'ordres

$$2m - 2\mu + 2, \quad 2m - 2\mu, \quad \ldots, \quad 4, 2, 1,$$

et alors on saura intégrer S. On voit que ces opérations sont d'ordres plus élevés que celles exigées par la méthode directe (§ 35). Cela tient à ce que, pour intégrer S, il n'est pas néces-

saire de savoir intégrer complètement S' (§ 25), de sorte qu'en passant par S, et l'intégrant *complètement*, nous devons, à priori, faire un certain nombre d'opérations inutiles pour l'intégration de S, ce qui nous conduit à cette conclusion :

S' étant le système S dans lequel on a fait disparaître la fonction inconnue, l'intégration de S et celle de S', par la méthode de Jacobi et Mayer, ne sont pas deux problèmes équivalents : les opérations exigées par le second sont d'ordres plus élevés que celles exigées par le premier.

Méthode de Lie.

37. Comme la précédente, cette méthode a pour but la recherche d'une intégrale complète. Elle repose essentiellement sur le théorème fondamental du § 19.

Soit R la réduite du système S. C'est une équation à $m - \mu + 1$ variables. Si l'on en connaît une intégrale complète, c'est-à-dire dépendant de $m - \mu + 1$ constantes arbitraires, on saura l'intégrer par des calculs algébriques et il en résultera l'intégration de S par des calculs algébriques, puisque cette intégration n'est qu'un cas particulier du problème de Cauchy relatif à R.

En prenant au hasard une fonction initiale contenant $m - \mu + 1$ constantes arbitraires, on aura, d'une infinité de façons, une intégrale complète de S.

Partons de R et adjoignons-lui une équation auxiliaire $\psi'_1 = a_1$ comme on l'a fait dans la méthode de Jacobi et Mayer; la fonction ψ'_1 devra verifier l'équation linéaire et homogène

$$[\mathrm{R}, \psi'_1] = 0$$

et la recherche d'une telle fonction sera une opération d'ordre $2m - 2\mu + 1$.

R et $\psi'_1 = a_1$ constituent un nouveau système S'_1 de deux équations à $m - \mu + 1$ variables et qui, en outre, contient la constante arbitraire a_1. Si l'on connait une intégrale complète de S'_1, c'est-à-dire une intégrale contenant $(m - \mu + 1) - 2 + 1$ ou $m - \mu$ constantes arbitraires, ce sera une intégrale complète

de R, puisqu'elle vérifie cette équation et contient, en outre des précédentes, la constante a_1.

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans des circonstances semblables à propos de la méthode de Jacobi et Mayer montrera encore que l'on obtiendra une véritable intégrale complète de R.

On est donc ramené à chercher une intégrale complète de S'_1. On lui appliquera les mêmes raisonnements qu'à S et on sera ramené à effectuer une opération d'ordre $2m - 2\mu - 1$, puis à chercher une intégrale complète d'un système S'_2 de deux équations à $m - \mu$ variables.

En continuant ainsi, on sera ramené, par des opérations successives d'ordres

$$2m - 2\mu + 1, \quad 2m - 2\mu - 1, \quad \ldots, \quad 5, 3,$$

à chercher une intégrale complète de $S'_{m-\mu}$ composée de deux équations à deux variables. On en prendra la réduite $R_{m-\mu}$ qui est une équation différentielle ordinaire dont l'intégrale générale qui dépend d'une constante arbitraire jouera le rôle d'intégrale complète et fournira par des calculs algébriques et d'une infinité de façons une intégrale complète de $S'_{m-\mu}$.

En résumé, la méthode de Lie exige des opérations successives d'ordres

$$2m - 2\mu + 1, \quad 2m - 2\mu - 1, \quad \ldots, \quad 5, 3, 1.$$

Dans le cas où le système S ne contient pas z, en s'assujettissant à prendre toujours des équations complémentaires où z ne figure pas, on a la même réduction que dans la méthode de Jacobi et Mayer; les opérations successives sont alors d'ordres

$$2m - 2\mu, \quad 2m - 2\mu - 2, \quad \ldots, \quad 4, 2, 1,$$

la dernière étant une quadrature.

Ainsi, comme ordres d'opérations, la méthode de Lie est identique à celle de Jacobi et Mayer.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DES SYSTÈMES CANONIQUES LINÉAIRES.

CHAPITRE V.

INTÉGRATION DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES.

Intégrales complètes.

Méthode de Jacobi et Mayer.

Méthode de Lie.

CONTRIBUTION

À

L'ANATOMIE DES RENONCULACÉES

LE GENRE *THALICTRUM*

PAR

A. MANSION

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES,
PROFESSEUR À L'ATHÉNÉE ROYAL D'A[illegible]

INTRODUCTION

Le genre *Thalictrum* a fait l'objet d'un certain nombre de travaux, tant au point de vue de l'anatomie qu'à celui de la systématique.

En 1861, M. C.-V. Gernet (1) a étudié la structure de la tige et de la racine du *Thalictrum flavum*. Il a cru reconnaître dans le groupement et dans la composition des faisceaux de la tige une certaine analogie avec les monocotylées. Dans la racine, au contraire, il a retrouvé le type général de l'organisation des dicotylées. L'auteur n'a étudié que des individus d'âge et de taille moyens, principalement des rhizomes.

La structure si spéciale des racines de *Thalictrum* a été élucidée par M. C.-Eg. Bertrand dans sa *Théorie du Faisceau* (2).

M. L. Olivier (3) est revenu sur ce point et a indiqué quelques

(1) *Xylologische Studien : Ueber die Structurverhältnisse des Stengels von* Thalictrum flavum. (Bulletin de la Société des naturalistes de Moscou, t. XXIV, 1re partie, pp. 432-452, 1861.)

(2) *Bulletin scientifique du département du Nord*, 2e série, 3e année (1880), nos 2, 3 et 4.

(3) *Recherches sur l'appareil tégumentaire des racines.* (Ann. sc. nat., 6e série, t. XI, 1881.)

particularités que présente la racine chez les Renonculacées.

M. J. Costantin ([1]) a comparé la structure de la tige souterraine du *T. minus* à celle de la tige aérienne de la même plante.

En 1884, M. Albert Meyer ([2]) a fait des observations histologiques dans la racine et la tige adultes du *Thalictrum minus*.

En 1885, M. Paul Marié ([3]) a analysé les sections du genre *Thalictrum* en examinant le plus grand nombre d'espèces qu'il lui a été possible d'obtenir. Dans chaque plante, il a décrit la structure des organes suivants : racine, rhizome, tige aérienne, pédicelle floral, pétiole, limbe. Toutefois, dans ce travail, comme dans les deux précédents, les descriptions ont été faites d'après quelques coupes seulement : l'ensemble de l'organisation a été négligé.

La même année, M. J.-L. Lecoyer ([4]), dans une monographie du genre *Thalictrum*, s'est occupé principalement des poils et des akènes au point de vue de la détermination spécifique. On trouve cependant dans ce mémoire quelques renseignements organographiques.

M. G. Bonnier ([5]) a exposé quelques considérations sur le

([1]) *Étude comparée des tiges aériennes et souterraines des Dicotylédones.* (Ann. sc. nat., 6e série, t. XVI, 1883.)

([2]) *Beiträge zur vergleichenden Anatomie der Ranunculaceen.* (Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde, von A. Meyer.) Marburg, Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich), 1884.

([3]) *Recherches sur la structure des Renonculacées.* (Ann. sc. nat., 6e série, Botanique, t. XX, 1885.)

([4]) *Monographie du genre* Thalictrum. (Bulletin de la Société royale de botanique de Belgique, t. XXIV, pp. 78-326, 1885.)

([5]) *Observations sur les Renonculacées de la flore de France,* dans la Revue générale de botanique, t. I, nos 6 et suiv., 1889.

développement sympodique du rhizome chez les *Thalictrum* de France, sur la germination de leurs graines, ainsi que sur certaines particularités de la structure de leurs racines et de leurs tiges.

Le présent travail consiste en une étude du genre *Thalictrum* au point de vue de l'anatomie générale, de façon à compléter les données déjà acquises. Il est destiné à faire suite aux recherches de M. Nihoul sur le *Ranunculus arvensis* (¹) et à celles de M. Lenfant sur les *Delphinium* (²).

Le genre *Thalictrum*, très homogène, semble réaliser, dans ses représentants, le maximum de complication anatomique de la famille des Renonculacées. Le *Thalictrum flavum* L., plante indigène, a été choisi comme type.

L'étude de l'embryon et des organes végétatifs a été faite aussi complètement et aussi consciencieusement que possible, en appliquant les méthodes les plus modernes et les plus précises.

Les variations étendues que présente la structure du type qui fait l'objet de ce mémoire ont nécessité la description de nombreuses régions anatomiques. L'exposé analytique s'est ainsi trouvé fort étendu. Aussi j'ai cru devoir apporter un soin tout spécial au résumé final. Le lecteur y trouvera une synthèse aussi complète et aussi concise que possible.

Mes recherches ont été faites au laboratoire de l'Institut bota-

(¹) *Contribution à l'étude anatomique des Renonculacées :* Ranunculus arvensis. (*Mémoires* in-4° publiés par l'Académie royale des sciences de Belgique, t. LII, 1891.)

(²) *Contribution à l'anatomie des Renonculacées : le genre* Delphinium, dans les MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE, 2ᵉ série, t. XIX, 1897.

nique de l'Université de Liége. Je suis heureux de pouvoir remercier ici publiquement M. le professeur A. Gravis, qui, après m'avoir engagé à entreprendre ce travail, n'a cessé de me prodiguer ses conseils et a bien voulu contrôler mes résultats.

CONTRIBUTION

À

L'ANATOMIE DES RENONCULACÉES

THALICTRUM FLAVUM L.

CHAPITRE PREMIER.

EMBRYON DANS LA GRAINE.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Le fruit du *Thalictrum flavum* est un akène légèrement comprimé latéralement et marqué de côtes sur ses deux faces. Il est terminé par un bec stylaire bien visible. Dans l'angle supérieur pointu de l'akène, au milieu d'un albumen abondant et dur, se trouve un embryon droit, extrêmement petit ($0^{mm},4$ de longueur sur $0^{mm},2$ de largeur).

Coupes transversales.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé* (fig. 1).

On y trouve de l'extérieur vers l'intérieur :

1. *L'épiderme* (Ep.), formé de cellules assez allongées dans le sens radial, limité extérieurement par une cuticule très mince.

2. *Le parenchyme cortical*, constitué par 5-7 assises de cellules

méatiques, à l'exception des deux couches profondes. L'assise extérieure est formée de cellules un peu plus petites, presque isodiamétriques. Les suivantes diminuent de largeur à mesure qu'on se rapproche du centre.

L'assise la plus profonde (End.) est un endoderme dont les éléments sont dans une alternance parfaite avec ceux qui leur sont immédiatement sous-jacents. Cet endoderme ne présente pas encore de plissements sur les parois radiales.

3. *Le cylindre central,* délimité par un péricycle assez net; celui-ci est une assise de cellules un peu plus grandes que les autres, alternant avec les éléments voisins. Le reste du massif est constitué par des éléments procambiaux.

Le diamètre du cylindre, qui comprend une dizaine de cellules, équivaut à peu près au tiers du diamètre total de la section.

B. *Région d'insertion des cotylédons.*

Une coupe pratiquée à la base du nœud cotylédonaire (fig. 2) montre la même structure avec les différences suivantes :

1° *Le parenchyme cortical* est moins épais et constitué par 4-5 assises de cellules;

2° *Le cylindre central* s'est élargi; deux cordons procambiaux s'en détachent, l'un en avant, l'autre en arrière. Ce sont les faisceaux cotylédonaires, situés dans le plan principal de symétrie, à égale distance du centre et des bords de la coupe.

Au niveau de leur sortie dans les cotylédons (fig. 3), les deux faisceaux procambiaux ne sont plus séparés de l'épiderme que par 1-2 assises de cellules. Entre les deux cotylédons, on aperçoit des cellules polygonales, sans méats, qui appartiennent au méristème primitif générateur de la tige principale.

Plus haut encore, la section transversale, pratiquée vers le milieu des cotylédons (fig. 4), montre à peine les faisceaux cotylédonaires faiblement indiqués.

Coupe longitudinale.

La coupe longitudinale de l'embryon, suivant son plan de symétrie principal, résume et complète ce qu'on vient d'observer sur les coupes transversales. On y retrouve (fig. 5) :

A. *Milieu de l'axe hypocotylé.*

1° *L'épiderme ;*

2° *Le parenchyme cortical* dont les couches sont formées de cellules de plus en plus étroites à mesure qu'elles sont plus profondes ;

3° *Le cylindre central,* formé d'éléments très étroits, allongés dans le sens de l'axe.

B. *Région d'insertion des cotylédons.*

Dans cette région, on voit insérés obliquement, sur le cylindre central de l'axe hypocotylé, les deux faisceaux qui sortent dans les cotylédons où ils sont peu marqués et ne s'y prolongent que jusque vers le milieu.

Le méristème primitif avec ses cellules polyédriques, isodiamétriques, occupe le sommet de l'axe hypocotylé. Il est recouvert par le dermatogène qui est en continuité directe avec l'épiderme des cotylédons.

C. *Région inférieure de l'axe hypocotylé.*

1° *La coiffe* est formée par des cloisonnements tangentiels de l'épiderme. A l'extrémité se trouvent des traces du suspenseur.

2° *Le parenchyme cortical* est engendré par deux cellules initiales qui se comportent différemment. L'extérieure donne naissance à une seule assise de cellules située sous l'épiderme. L'intérieure donne naissance, par des cloisonnements tangentiels, à 4 ou 5 assises cellulaires.

3° *Le cylindre central* est terminé inférieurement par quelques cellules initiales, destinées à engendrer plus tard le faisceau de la racine principale.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DE L'APPAREIL VÉGÉTATIF.

Ce développement a été étudié à cinq stades depuis le début de la germination jusqu'à la fin de la deuxième année.

STADE I.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Début de la germination; la portion de la radicule sortie de la graine mesure 2 millimètres de longueur.

STRUCTURE.

Coupes transversales.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé* (fig. 6).

Diffère peu du niveau correspondant dans l'embryon.

Le cylindre central s'est agrandi et ses cellules se sont subdivisées de façon à devenir près de trois fois plus nombreuses. De plus, aux extrémités du diamètre perpendiculaire au plan de symétrie, on observe quelques éléments différenciés marquant les deux pôles libériens (L^1).

B. *Région d'insertion des cotylédons.*

La coupe pratiquée à la base du nœud cotylédonaire (fig. 7) montre, outre les deux pôles libériens comme ci-dessus, deux pôles ligneux, l'un antérieur, l'autre postérieur, marqués l'un et l'autre par une trachée séparée de l'endoderme par deux rangs de cellules péricycliques. La différenciation de ces trachées se

faisant de haut en bas, elles ne sont pas encore visibles sur la coupe pratiquée au milieu de l'axe hypocotylé. Dans la figure 7, les deux pôles ligneux de l'axe hypocotylé sont désignés par t. R., parce qu'ils sont aussi les deux pôles de la racine principale qui se développera par la suite.

A un niveau un peu plus élevé (fig. 8), les trachées t. R. sont en contact avec les trachées t. C., qui sont les trachées polaires des faisceaux cotylédonaires.

Un peu plus haut encore (fig. 9), les trachées t. C. existent seules. Elles se prolongent dans la nervure médiane de chaque cotylédon, comme on le voit dans la figure 10.

Coupe longitudinale.

La coupe longitudinale représentée par la figure 11 est pratiquée dans une plantule arrivée à un stade intermédiaire au stade I et au stade II, au moment où chaque pôle ligneux de l'axe hypocotylé possède trois trachées différenciées en direction centripète (1.2.3. et 3.2.1.). On voit nettement le contact entre ces trachées et les trachées polaires centrifuges des faisceaux cotylédonaires (3.2.1. et 1.2.3.). On remarquera en outre que les trachées effectuant le contact sont courtes et à spires serrées.

STADE II.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Les cotylédons dégagés du péricarpe sont épigés et étalés, mais aucune trace de feuille n'est visible à l'œil nu. Il existe cependant déjà quelques petites feuilles qui, avec le sommet végétatif, sont cachées par les pétioles cotylédonaires très allongés (1 centimètre environ) (fig. 12).

L'axe hypocotylé (A. h.), reconnaissable à sa surface lisse (formée par l'épiderme), a une longueur de 2 à 3 centimètres et une épaisseur de $0^{mm},5$ environ en son milieu.

La racine principale (R. p.), dont la surface est terne (constituée par l'assise pilifère), est environ de moitié plus courte que l'axe hypocotylé. Il n'y a pas encore de radicelles. Nous désignerons, avec M. Nihoul [1], sous le nom de « collet superficiel » le niveau où la surface change d'aspect (voir *col. sup.* dans la figure 12).

STRUCTURE.

Coupes transversales.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé.*

1° *L'épiderme* porte des poils glanduleux peu abondants (fig. 13).

2° *Le parenchyme cortical méatique* comprend 6-7 assises circulaires de cellules arrondies. L'endoderme est reconnaissable à de légers plissements sur les cloisons radiales. Vu de face, cet endoderme montre ses cellules allongées, étroites et nettement plissées (fig. 14).

3° *Le cylindre central* (fig. 13) est un faisceau bipolaire arrivé au stade primaire dont les pôles ligneux se trouvent dans le plan principal de symétrie de la plantule. Les pôles ligneux cunéiformes se composent de dix à douze trachées. La partie centrale du faisceau non différenciée est formée d'une dizaine de cellules à parois minces, sans méats. A droite et à gauche, on trouve,

[1] *Loc. cit.*, p. 13 des tirés à part.

alternant avec les pôles ligneux, deux massifs libériens déjà bien développés. Pas de zones cambiales.

B. *Région d'insertion des cotylédons et de la tige principale.*

Dans la région supérieure de l'axe hypocotylé, à la base du nœud cotylédonaire, on remarque que le cylindre central est beaucoup plus important. Son diamètre s'allonge perpendiculairement au plan principal de symétrie, les deux massifs libériens étant ici beaucoup plus développés. Le bois centripète forme une lame médiane continue (t^1t^1), constituée par une dizaine de trachées séparées par des cellules non différenciées, à parois minces. A droite et à gauche de cette lame bipolaire de bois centripète, existe un large faisceau à bois centrifuge, vaguement divisé en trois lobes (fig. 16).

A un niveau un peu supérieur, les deux pôles ligneux centripètes écrasés (t^1t^1) se retrouvent difficilement, mais les faisceaux à bois centrifuge sont parfaitement distincts et circonscrivent une moelle véritable (fig. 17). Les faisceaux à bois centrifuge sont les quatre faisceaux cotylédonaires (qui doivent s'unir plus haut deux à deux), le faisceau médian de la feuille [1] (M^1) et le faisceau médian de la feuille [2] (M^2). Voyez figures 16 et 17.

A un niveau un peu supérieur encore, on assiste à la sortie des faisceaux cotylédonaires qui entraînent avec eux les pôles ligneux centripètes (fig. 18). Une moelle assez large existe au centre de l'organe, et autour de cette moelle se distinguent six faisceaux libéro-ligneux dont deux (M^1 et M^2) avec trachées différenciées. Ce sont les faisceaux médians de la feuille [1] et de la feuille [2]. En outre, il y a quatre faisceaux réparateurs A, B, C, D, au stade du procambium, moins accentué que dans le *Ranunculus arvensis.*

Une coupe pratiquée dans le bourgeon terminal (fig. 19) montre :

1° Une gaine constituée par la concrescence des pétioles cotylédonaires. On y remarque les deux faisceaux qui se rendent l'un dans le cotylédon antérieur, l'autre dans le cotylédon postérieur;

2° La feuille [1] et la feuille [2], l'une à droite et l'autre à gauche, sensiblement opposées, possédant chacune trois faisceaux dont

un médian et deux latéraux. Mais, tandis que les trois faisceaux de la feuille [1] possèdent déjà des trachées différenciées, le médian seul dans la feuille [2] est arrivé au stade de différenciation libéro-ligneuse, les deux latéraux étant encore au stade procambial;

3° La section de la tige montrant l'ébauche de la feuille [3] et de la feuille [4].

C. *Racine principale.*

Une coupe transversale pratiquée dans la racine principale, un peu au-dessous du collet superficiel, montre :

1° *L'assise pilifère* dont il ne subsiste que des traces;

2° *Le parenchyme cortical* à cellules disposées en files radiales se terminant vers l'intérieur par l'endoderme. L'assise externe du parenchyme cortical (sous-pilifère) est constituée par de grandes cellules à parois plus épaissies et beaucoup plus résistantes que celles des autres assises qui se chiffonnent avec la plus grande facilité;

3° *Le faisceau* limité par un péricycle très net formé par une seule assise de grandes cellules. Les deux massifs ligneux cunéiformes se développent en direction centripète. Ils présentent de petits éléments vers l'extérieur et des cellules centrales de grand diamètre non différenciées. Deux massifs libériens alternent avec les pôles ligneux; on y reconnaît facilement les cellules grillagées. Aucune zone cambiale n'est encore visible (fig. 20).

Les coupes successives prouvent que le faisceau bipolaire qui parcourt la racine principale dans toute son étendue n'est que le prolongement de celui que l'on observe dans l'axe hypocotylé.

Coupe longitudinale.

Vers le milieu de l'axe hypocotylé, une coupe longitudinale pratiquée suivant le plan de symétrie (fig. 21) montre que chaque pôle ligneux est occupé par une trachée spiro-annelée très étroite et très étirée. En dedans, de chaque côté, se trouvent deux trachées spiralées plus larges et très longues. Les trachées suivantes sont encore plus larges, plus courtes et à spiricules très serrées.

STADE III.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Trois petites feuilles sont visibles et deux autres sont encore cachées. Ces feuilles présentent quelques particularités de forme et de structure que nous ferons connaître plus loin.

Les cotylédons ont atteint leur maximum de développement et nous saisirons cette occasion pour faire connaître leur structure.

L'axe hypocotylé s'est notablement épaissi (2 millimètres environ de diamètre) ; sa surface, lisse au stade précédent, est maintenant fortement ridée transversalement (fig. 22 et 23).

La racine principale, également fort épaissie, présente une surface terne, brunâtre, marquée dans sa portion voisine du collet superficiel, de quelques plis à peine indiqués. Elle porte de nombreuses radicelles disposées alternativement à droite et à gauche, sur toute sa longueur.

STRUCTURE DE L'AXE HYPOCOTYLÉ.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé* (fig. 24).

On rencontre une structure assez différente de celle qu'on y a observée au stade précédent :

1° *L'épiderme.*

2° *Le parenchyme cortical,* dont la majeure partie est détruite, présente trois assises seulement de cellules ayant conservé leur vitalité; ce sont : les assises sous-épidermique, sus-endodermique et endodermique. Les 4-5 assises intermédiaires sont mortes et ont été déchirées irrégulièrement. Une coupe longitudinale radiale (figure 25, à comparer à la figure 24) montre bien la surface ridée ainsi que les déchirures entre l'assise sous-épidermique et l'assise sus-endodermique. La figure suivante (fig. 26) donne le détail à un grossissement plus fort.

Sachs [1] a démontré l'existence d'une tension longitudinale dans le parenchyme cortical de l'axe hypocotylé du *Sinapis arvensis.* Qu'une déchirure longitudinale et annulaire se produise dans ce parenchyme cortical, les couches extérieures ainsi détachées auront toute liberté de s'allonger, c'est-à-dire de se rider, leur nutrition restant assurée par les deux extrémités supérieure et inférieure demeurées en contact avec les autres tissus. Les couches intérieures, au contraire (endoderme, péricycle, etc.), qui sont encore fixées au cylindre central, ne peuvent s'allonger de la même manière.

3° *L'endoderme,* dont les éléments considérablement accrus se sont recloisonnés radialement jusqu'à une dizaine de fois. Les parois des cellules primitives sont fortement épaissies, tandis que les cloisons nouvelles sont restées minces (fig. 24 et 26) [2]. Cet endoderme ne contient pas d'amidon, mais ses nombreux éléments renferment chacun un gros noyau granuleux et du protoplasme fortement coloré en jaune. La coupe longitudinale tangentielle montre dans chaque cellule endodermique que les recloisonnements dans le sens radial ont été accompagnés de recloisonnements dans le sens transversal (figure 27 à comparer à la figure 26).

4° *Le péricycle* a recloisonné tangentiellement ses éléments un grand nombre de fois.

5° *Le bois* (fig. 28) : Le bois primaire (B^1) se retrouve au centre de la coupe; le bois secondaire (B^2) est disposé en deux massifs constitués chacun par des vaisseaux rayés, comme on peut s'en assurer sur la coupe longitudinale.

6° *Le liber :* Les deux massifs de liber primaire (L^1), refoulés contre le péricycle recloisonné, sont plus ou moins écrasés; le liber secondaire (L^2), très développé, contient de grandes cellules

[1] *Physiologie végétale.* Traduction française, 1868, p. 499.

[2] MM. Olivier (*loc. cit.*, p. 118), Marié (*loc. cit.*, pp. 32, 35 et 37), Bonnier (*loc. cit.*, p. 342) ont signalé le recloisonnement radial et parfois tangentiel des cellules endodermiques des racines de divers *Thalictrum.*

grillagées disséminées par petits groupes dans un parenchyme libérien très abondant.

7° *La zone génératrice,* circulaire et continue, est constituée de deux arcs cambiaux (C*b*) réunis par deux ponts de cambiforme (C*bf*) ([1]). Voyez figure 24.

8° *Le tissu fondamental secondaire.* En même temps que les deux arcs cambiaux produisaient du bois secondaire et du liber secondaire, les deux ponts de cambiforme ont engendré en dedans un peu de tissu fondamental secondaire interne (Tf^{2i}), et en dehors du tissu fondamental secondaire externe (Tf^{2e}) très abondant (fig. 24).

B. *Région d'insertion des cotylédons et de la tige principale.*

Sur une section transversale pratiquée à la base du nœud cotylédonaire, on retrouve la structure de la coupe précédemment décrite au milieu de l'axe hypocotylé, mais on y remarque, en outre, le contact des trachées centrifuges des faisceaux foliaires (t. Fe^1 et t. Fe^2) avec les trachées centripètes du faisceau bipolaire de l'axe hypocotylé et de la racine (t. R.) (fig. 29).

A un niveau un peu supérieur, on voit la sortie des faisceaux cotylédonaires entrainant avec eux les trachées centripètes du faisceau bipolaire (fig. 30). A ce niveau de la figure 30, les faisceaux foliaires M^1 et M^2 sont parfaitement isolés, comme aussi les faisceaux réparateurs A, B, C, D.

([1]) Le terme *cambiforme* sera employé, dans ce travail, en lui donnant le sens que M. C.-Eg. Bertrand lui a attribué dans sa *Théorie du Faisceau*, p. 43 (Bull. scientif. du dép. du Nord, 2e série, 3e année, 1880, nos 2, 3 et 4). Il désignera donc un tissu générateur à cloisonnement tangentiel et à fonctionnement ordinairement double, comme celui du cambium, mais qui n'engendre ni bois secondaire, ni liber secondaire. Le savant professeur de Lille nomme « liège » et « tissu fondamental secondaire » les produits du cambiforme. Nous avons cru, à l'exemple de M. A. Gravis, pouvoir substituer à ces expressions celles de Tf^{2e} et de Tf^{2i} pour éviter toute confusion avec le tissu subéreux.

STRUCTURE DE LA TIGE PRINCIPALE.

Une coupe faite au milieu du premier entrenœud de la tige principale présente six faisceaux disposés en deux groupes de trois, l'un à droite, l'autre à gauche du plan principal de symétrie. Ces deux groupes existaient déjà au stade II.

Le groupe de droite est formé d'un foliaire M^1 et de deux réparateurs B et C; le groupe de gauche comprend aussi un foliaire M^2 et deux réparateurs A et D.

Outre le faisceau médian M^1, la feuille ^{1} reçoit deux faisceaux latéraux L^1 fournis par les réparateurs B et C. De même, la feuille ^{2} reçoit, outre le médian M^2, deux latéraux L^2 issus des réparateurs A et D. Il en résulte que les faisceaux latéraux destinés à la feuille ^{1} croisent en sortant les faisceaux latéraux destinés à la feuille ^{2}. De même les faisceaux latéraux destinés à la feuille ^{3} s'entrecroisent en sortant avec les faisceaux destinés à la feuille ^{2}.

La feuille ^{1} et la feuille ^{2} reçoivent chacune trois faisceaux; chacune des feuilles 3, 4 et 5 en reçoit cinq, dont un médian M, deux latéraux L, L et deux marginaux *m*, *m*. Ces faisceaux marginaux sont fournis respectivement par les réparateurs B et C.

L'examen des coupes successives permet de reconnaître le parcours des faisceaux dans la tige principale et leur sortie dans les premières feuilles. Ce parcours est reproduit par la figure 32.

PHYLLOTAXIE.

Il résulte de l'observation attentive de plusieurs individus arrivés au stade que nous décrivons, que les faisceaux cotylédonaires sortent très sensiblement au même niveau et que les foliaires latéraux de la feuille ^{1} se détachent des réparateurs en même temps. La plantule en général n'est donc pas plus développée à la face antérieure qu'à la face postérieure. Dans certains cas cependant, la feuille ^{3} reçoit quatre faisceaux au lieu de trois, le supplémentaire étant un marginal antérieur. Dans le *Ranunculus arvensis*, au contraire, M. Nihoul a montré que la face antérieure de l'axe hypocotylé est plus large que l'autre. Dans le *Thalictrum flavum*, la position du cotylédon antérieur

ne peut être déterminée que par l'observation de la spire phyllotaxique elle-même. C'est ce que l'on voit dans la figure 31, qui représente la section pratiquée dans le bourgeon terminal.

Dans cette figure 31, il est facile de supposer une spirale partant du cotylédon antérieur, se dirigeant vers la gauche de l'observateur supposé au centre de la tige, passant successivement par le cotylédon postérieur, les feuilles 1, 2, 3, 4 et 5. Du cotylédon antérieur au cotylédon postérieur, il y a un peu moins d'une demi-circonférence; du cotylédon postérieur à la feuille ^{1}, il y a un quart de circonférence environ; de la feuille ^{1} à la feuille ^{2}, de la feuille ^{2} à la feuille ^{3}, de la feuille ^{3} à la feuille ^{4}, de la feuille ^{4} à la feuille ^{5}, l'angle de divergence devient assez constant et est compris entre 160° et 170°.

Cette divergence moyenne de 160° à 170° dans les feuilles inférieures passe, pour les feuilles suivantes, à la divergence de 145° environ (soit $^2/_5$), qui est la divergence moyenne des feuilles sur les tiges adultes du *Thalictrum flavum* L.

La plantule qui nous a servi d'exemple jusqu'ici était sénestre, c'est-à-dire que sa spire phyllotaxique tournait en sens inverse des aiguilles d'une montre; sa feuille ^{1} était à droite. D'autres plantules, au contraire, sont dextres, c'est-à-dire que leur spire phyllotaxique tourne comme les aiguilles d'une montre; leur feuille ^{1} est à gauche. Dans ces plantules dextres, le faisceau M^1 est donc situé entre les réparateurs A et D; le faisceau M^2 se trouve entre les réparateurs B et C.

STRUCTURE DE LA RACINE PRINCIPALE.

Les coupes transversales dans la racine principale montrent une structure analogue à celle de la coupe pratiquée au milieu de l'axe hypocotylé, avec les différences suivantes :

L'assise pilifère flétrie est rejetée par place en même temps que l'assise sous-pilifère et les débris des assises sous-jacentes.

De nombreuses radicelles sont insérées en face des pôles ligneux. La région de contact entre ces racines latérales et la racine principale est marquée par un diaphragme constitué par de nombreuses trachées courtes et de grand diamètre.

STRUCTURE DES COTYLÉDONS.

Au stade III, les cotylédons sont arrivés à leur complet développement. Les pétioles, concrescents à leur base, mesurent 1 centimètre de longueur environ, sur $0^{mm},5$ à 1 millimètre de largeur. Le limbe, de forme ovale plus ou moins allongée, présente un sinus terminal et mesure 10 à 12 millimètres de longueur et 6 à 8 millimètres de largeur. Sa nervation consiste en une nervure médiane et deux paires de nervures latérales. Ces cinq nervures principales portent des ramifications qui se terminent généralement sans s'anastomoser (fig. 33).

A une petite distance de son sinus terminal, le limbe contient une glande à eau à laquelle aboutissent la nervure médiane ainsi que les deux nervures latérales supérieures. Les deux nervures latérales inférieures, au contraire, se terminent en pointe libre (schéma fig. 34). Parfois l'une de ces deux latérales inférieures fait défaut (fig. 35); quelquefois même elles manquent toutes les deux (fig. 36). Ces faits semblent indiquer que les cotylédons se développent en direction basipète.

Nous savons déjà que chaque cotylédon reçoit deux faisceaux qui se fusionnent peu après leur sortie et qu'un pôle ligneux centripète de l'axe hypocotylé accompagne les faisceaux cotylédonaires. A la base du pétiole, chaque faisceau montre donc, outre le bois primaire centrifuge, quelques trachées du bois centripète actuellement écrasées (fig. 37).

Au milieu du pétiole cotylédonaire, la même structure se retrouve avec une seule différence : le bois centripète fait défaut (fig. 38).

Au sommet du pétiole, la section indique trois faisceaux rapprochés.

La coupe au milieu du limbe montre (fig. 39) :

1° *L'épiderme interne* (supérieur), avec poils glanduleux, mais sans stomates ;

2° *L'épiderme externe* (inférieur), garni de nombreux et grands stomates, excepté le long des nervures, et de quelques poils glanduleux ;

3° *Le mésophylle :* Parenchyme en palissade formé par un ou

deux rangs de cellules; parenchyme spongieux constitué par cinq ou six rangs de cellules laissant entre elles d'assez grands méats;

4° *Les faisceaux libéro-ligneux*, au nombre de huit à dix et de diverses grosseurs.

Vers le sommet du cotylédon, au niveau de la glande à eau, la section indique que la face interne du cotylédon se creuse légèrement en gouttière à l'endroit de la glande. La partie ligneuse de la nervure médiane est représentée à ce niveau par dix à quinze trachées délicates. En avant de ces trachées existe un massif assez important de petites cellules incolores (« épithème » des auteurs allemands), recouvert directement par l'épiderme interne à éléments fort amincis en cet endroit; on y voit l'orifice d'un stomate aquifère (fig. 40).

Les coupes successives au-dessus de ce niveau nous font assister à la disparition progressive des trachées et à l'augmentation simultanée du nombre des éléments incolores de la glande à eau.

L'épiderme interne, vu de face à l'endroit où il recouvre la glande à eau, est formé de cellules plus petites que celles qui le constituent partout ailleurs et y présente une douzaine de stomates aquifères qui font défaut sur tout le reste de la surface (fig. 41).

L'épiderme externe, au contraire, est garni de nombreux et grands stomates aérifères (fig. 42); il porte aussi des poils glanduleux unicellulaires assez fréquents. Au-dessus de la glande à eau, comme tout le long de la nervure médiane, les stomates font défaut.

Les stomates aérifères affectent la forme renonculacée de Vesque. Les poils glanduleux unicellulaires renferment un gros noyau granuleux et du protoplasme vivement coloré en jaune, comme ceux décrits au stade précédent.

Les stomates aquifères sont béants et leurs cellules de bordure renferment de très gros grains de chlorophylle. Quand on observe le matin des plantules en germination de *Thalictrum flavum* en plein air, on constate l'existence d'une petite gouttelette d'eau logée dans la gouttière de la face interne des cotylédons; ce fait prouve bien que ces organes sont destinés à

remédier à l'excès de tension dans l'appareil aquifère comme dans les cotylédons d'un certain nombre de plantes, notamment de l'*Urtica dioïca.*

STRUCTURE DE LA FEUILLE [1].

La feuille [1] mesure environ 2 centimètres de longueur. La gaine, assez courte (5 millimètres environ), présente deux expansions latérales, très peu proéminentes (fig. 43). Le pétiole, cylindrique et plein, est long de 1 centimètre environ. Les folioles, au nombre de trois, sont brièvement pétiolulées, arrondies à la base et trilobées au sommet. L'examen par transparence montre dans chacun de ces lobes une glande à eau à laquelle aboutissent plusieurs nervures (fig. 44).

La section transversale de la gaine (fig. 45) présente les trois faisceaux L, M, L, qui parcourent sans se diviser toute l'étendue du pétiole (fig. 46), mais qui se trifurquent et s'anastomosent au sommet du pétiole (fig. 47). Chaque pétiolule reçoit trois faisceaux.

Dans certaines feuilles [1], l'un des faisceaux L se bifurque de telle sorte que, vers le milieu du pétiole, la section présente quatre faisceaux (fig. 48), dont un opposé au médian et que nous nommerons O.

Au sommet du pétiole, ce faisceau O se bifurque (fig. 49) et ses branches, se fusionnant à droite et à gauche, se perdent dans l'anastomose de cette région.

La section vers le milieu d'une foliole montre (fig. 50) :

1° *L'épiderme externe*, à cellules tabulaires dépourvues de chlorophylle, à cuticule assez mince et lisse, à stomates nombreux, de même forme que ceux des cotylédons. Les poils glanduleux sont très peu abondants;

2° *L'épiderme interne*, sans stomates, est formé de cellules à cuticule mince;

3° *Le mésophylle*, légèrement bifacial : un seul rang de cellules en palissade, deux ou trois rangs de cellules arrondies dans le parenchyme spongieux. La chlorophylle est uniformément répartie dans tout le mésophylle. Il n'y a pas de cristaux.

Entre chaque nervure et l'épiderme externe, il y a un petit massif collenchymateux;

4° *Les nervures* sont formées chacune par un seul faisceau entouré d'une assise cellulaire légèrement différenciée.

Quant à la structure des glandes à eau, elle est identique à celle décrite dans les cotylédons.

OBSERVATIONS PHYSIOLOGIQUES : ENFONCEMENT DES PLANTULES.

Dans nos germinations, nous avons toujours constaté des cotylédons épigés; d'après M. G. Bonnier [1], le *T. minus* germe parfois avec des cotylédons presque hypogés, l'axe hypocotylé restant très court.

Nous avons toujours vu l'axe hypocotylé en majeure partie aérien, lisse d'abord, ridé ensuite. Vers la fin de la première saison, la plantule s'enfonce graduellement en terre; l'axe hypocotylé, le nœud cotylédonaire et les premiers nœuds de la tige principale deviennent ainsi souterrains. Des radicelles d'ailleurs prennent naissance tout le long de l'axe hypocotylé dont le parenchyme cortical est décortiqué. De sorte que, à ce moment, il n'est plus possible de distinguer l'axe hypocotylé de la racine principale. On peut se demander si l'enfoncement des plantules résulte d'une contraction longitudinale de l'axe hypocotylé, de la racine principale ou des racines adventives.

A l'effet de répondre à cette question, la plantule représentée par la figure 51 et dont l'axe hypocotylé était déjà enfoncé dans le sol, a servi à l'expérience suivante.

L'axe hypocotylé a été isolé, la racine principale a été partagée en trois portions, les deux racines adventives ont été isolées.

Ces six fragments, numérotés dans la figure 51, ont été mesurés au sortir du sol, puis après un séjour dans l'eau, puis encore après avoir été maintenus dans des solutions de salpêtre plus ou moins concentrées [2]. Les résultats sont consignés dans le premier tableau suivant.

[1] *Loc. cit.*, p. 340.

[2] Pour mesurer très exactement les fragments, je me suis servi avec avantage du procédé suivant, qui m'a été indiqué par M. le professeur A. Gravis : L'objet est dessiné à la chambre claire, à un grossissement de dix diamètres; les dessins sont ensuite mesurés au moyen d'une sorte de curvimètre qui permet de suivre toutes les courbures; les longueurs trouvées ont été divisées par 10.

PARTIES MISES EN EXPÉRIENCE.	Longueur au sortir du sol.	Longueur après trois heures dans l'eau.	Longueur après vingt heures dans l'eau.	Longueur après quatre heures dans salpêtre 10 °/₀.	Longueur après quatre heures dans salpêtre saturé.	Longueur après vingt heures dans salpêtre saturé.	RÉSULTATS.
PREMIER TABLEAU (Plantule de la fig. 51).							
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
N° 1. Axe hypocotylé âgé . .	8.2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	Pas de changement, ni dans l'eau, ni dans les solutions salines.
N° 2. Racine principale, portion âgée	17,3	17,3	17,3	17,6	17,8	17,8	Pas de changement dans l'eau. Allongement de 2.89 °/₀ dans les solutions salines.
N° 3. Racine principale, portion plus jeune.	17,2	17,2	17,2	17.4	17,9	17.9	Pas de changement dans l'eau. Allongement de 4.06 °/₀ dans les solutions salines.
N° 4. Racine principale, portion plus jeune encore.	15,9	16,3	16,3	16,1	16,0	16,0	Allongement de 2,51 °/₀ dans l'eau. Raccourcissement de 1,84 °/₀ dans les solutions salines.
N° 5. Portion de racine latérale.	12,4	12,6	13,0	12,5	12,4	12,4	Allongement de 4,83 °/₀ dans l'eau Raccourcissement de 4,61 °/₀ dans les solutions salines
N° 6. Portion de racine latérale.	19,4	20,9	21,2	20,5	20,7	20,9	Allongement de 9,27 °/₀ dans l'eau. Raccourcissement de 3.30 °/₀ dans solution à 10 °/₀. Allongement de 1,90 °/₀ dans solution saline saturée.
DEUXIÈME TABLEAU.							
N° 7. Axe hypocotylé jeune .	14,7	14,8	15,1	14,5	14,3	14,3	Allongement de 2,72 °/₀ dans l'eau. Raccourcissement de 5,29 °/₀ dans les solutions salines.
N° 8. Pétiole jeune. . . .	15,1	15,8	18,0	16,7	16,6	16,6	Allongement de 19,20 °/₀ dans l'eau. Raccourcissement de 7,77 °/₀ dans les solutions salines.
N° 9. Pétiole plus âgé. . .	15,9	16,2	16,5	16,3	16,0	16,0	Allongement de 3,77 °/₀ dans l'eau. Raccourcissement de 3,03 °/₀ dans les solutions salines.

Les mêmes expériences ont été faites sur l'axe hypocotylé d'une très jeune plantule au stade II, ainsi que sur deux jeunes pétioles d'une plantule plus âgée. (Voir le second tableau de la page précédente.)

Il résulte de ces expériences :

1° Que les portions jeunes de la racine principale et des racines adventives (n°s 4 et 5) s'allongent dans l'eau et se raccourcissent dans les solutions salines. Elles se comportent exactement comme de jeunes pétioles et comme l'axe hypocotylé jeune (n°s 7, 8 et 9);

2° Que les portions plus vieilles de la racine principale (n°s 2 et 3) ne subissent pas de changements appréciables dans l'eau (leur croissance étant terminée), mais qu'elles s'allongent dans les solutions salines;

3° Que l'axe hypocotylé âgé (n° 1) conserve une longueur invariable dans l'eau et dans les solutions salines.

Quant à la racine adventive (n° 6) qui, après s'être allongée dans l'eau, s'est raccourcie dans la solution saline à 10 °/o et allongée de nouveau dans la solution saline saturée, l'anomalie provient probablement de ce que cette racine, étant déjà assez longue, comprenait une région jeune et une région plus âgée, fonctionnant autrement que la première.

Laissant de côté ce n° 6, les autres fragments nous permettent de conclure que certaines portions de racine suffisamment âgées se comportent d'une façon tout opposée à celle des autres organes, c'est-à-dire qu'elles sont capables de s'allonger par plasmolyse et de se raccourcir par turgescence. C'est cette dernière propriété qui peut, chaque fois que le sol est humecté par la pluie, provoquer un raccourcissement, c'est-à-dire un enfoncement de la plantule.

Plus tard, lorsque les racines adventives seront suffisamment âgées, elles ajouteront leur effort à celui de la racine principale : l'axe hypocotylé et les premiers nœuds de la tige principale se trouveront ainsi amenés sous la surface du sol.

L'enfoncement progressif des plantules par le mécanisme qui

vient d'être décrit semble avoir été complètement méconnu par M. G. Bonnier, qui s'est exprimé ainsi (*loc. cit.*, p. 340) :

« Dans tous les cas, la racine principale disparaît pendant la première année, et une branche latérale s'enfonce en terre, accumule une provision de nourriture et produit des racines adventives. Ce sera le début du rhizome qui se développe et s'accroît pendant les années suivantes. »

On verra, dans les stades suivants, que la tige principale du *T. flavum* ne produit pas de « branche latérale » s'enfonçant en terre; les bourgeons axillaires situés sur la partie de la tige principale qui a été enterrée par le raccourcissement des racines, passent l'hiver dans le sol; ils se développent plus tard en tiges aériennes florifères qui possèdent nécessairement une portion souterraine, laquelle constitue le premier article du rhizome sympodique.

STADE IV.

Plante vers la fin de la première année.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

La tige principale mesure 5-6 centimètres de hauteur; elle a développé de 10 à 14 feuilles (fig. 52).

Les quatre premières feuilles, qui restent toujours assez longtemps petites, sont rapprochées deux à deux, simulant deux paires d'appendices. Les feuilles [1] et [2], en effet, ne sont séparées que par un très court entre-nœud; elles sont presque opposées l'une à l'autre. Il en est de même des feuilles [3] et [4].

Les feuilles suivantes, qui prennent un développement beaucoup plus grand, sont séparées par des entre-nœuds notablement plus longs.

Le bourgeon terminal est enveloppé par une feuille transformée en pérule. Cette feuille est réduite à une gaine fusiforme terminée par un pétiole et un limbe rudimentaires. Elle assure la protection du bourgeon terminal pendant l'hiver.

STRUCTURE DE L'AXE HYPOCOTYLÉ.

Il suffira de signaler que le parenchyme cortical et l'épiderme mortifiés sont tombés et que l'endoderme forme actuellement la surface. Les cellules de l'endoderme, qui reste longtemps vivant, se sont recloisonnées; leurs parois extérieures sont jaunes et comme cutinisées. Dans la figure 53, on voit nettement la coupe transversale de trois cellules endodermiques recloisonnées radialement en petites cellules ayant l'apparence de cellules épidermiques.

Le péricycle a subi des recloisonnements en diverses directions : ses éléments possèdent maintenant des parois épaisses et collenchymateuses.

Nous ferons connaître le parcours des faisceaux et l'histologie.

A. PARCOURS DES FAISCEAUX.

Quelques remarques au sujet de la figure 54 suffiront.

Le premier segment de la tige, au-dessus des cotylédons, contient dix faisceaux, savoir : les foliaires du nœud ^{1}

$$(LML)^1,$$

quatre réparateurs A, B, C, D et les foliaires du nœud ^{2}

$$(LML)^2.$$

Les segments 2, 3 et 4 présentent la même organisation.

Le segment 5 contient quinze faisceaux, savoir : les foliaires du nœud ^{5}

$$(mLMLm)^5,$$

cinq réparateurs A′, A″, B, C, D et la trace foliaire du nœud ^{6}

$$(mLMLm)^6.$$

Les segments 6 et 7 ont la même composition.

Le segment 8 présente dix-sept faisceaux, savoir : les foliaires du nœud ^{8}

$$(mLiMiLm)^8,$$

six réparateurs, A′, A″, B′, B″, C, D, et une partie des foliaires de nœud ^{9}.

Le segment 9 est peu différent.

Le segment 10 montre vingt et un faisceaux, savoir :

$$(mLiMiLmm')^{10},$$

huit réparateurs A′, A″, A‴, B′, B″, C, D′, D″ et une partie des foliaires du nœud ^{11}.

Les segments suivants sont semblables ou diffèrent en ce que les foliaires sont au nombre de neuf

$$(m'mLiMiLmm')\ [1].$$

[1] Dans toutes les traces foliaires, M désigne le faisceau *médian*, L désigne les faisceaux *latéraux*, *i* les faisceaux *intermédiaires*, *m* les faisceaux *marginaux*. Les intermédiaires et les marginaux peuvent être de divers ordres, ce qui est indiqué par les signes ′, ″, ‴, etc.

Il n'y a pas d'anastomoses aux nœuds.

Quant aux bourgeons axillaires, ceux des quatre premiers nœuds sont très peu développés. Les autres reçoivent des faisceaux gemmaires en nombre double des faisceaux foliaires. Ils sont insérés dans la partie inférieure de chaque nœud; il y en a un à droite et un à gauche de chaque foliaire sortant.

En résumé : La plante, pendant la première année, développe successivement des segments caulinaires et des feuilles de plus en plus amples. La tige principale comprend quatre portions:

La première comprenant quatre segments caractérisés par une douzaine de faisceaux dont une trace foliaire de trois faisceaux;

Une deuxième portion comprenant trois segments caractérisés par une quinzaine de faisceaux avec trace foliaire de cinq faisceaux;

Une troisième portion comprenant deux segments caractérisés par une vingtaine de faisceaux avec trace foliaire de sept faisceaux;

Enfin, une quatrième portion comprenant cinq segments caractérisés par vingt à trente faisceaux avec trace foliaire de huit ou neuf faisceaux.

D'autres individus du même âge ont été étudiés d'une façon aussi complète; de légères différences ont été constatées, mais les faits généraux énoncés ci-dessus sont partout les mêmes.

B. HISTOLOGIE.

Nous nous bornerons à signaler ici quelques particularités intéressantes.

Les premières feuilles étant de petite taille et disparaissant de bonne heure, les faisceaux foliaires qui vont à ces feuilles contiennent peu de bois secondaire; par contre, il se développe, à la place de ce tissu, un massif volumineux de tissu fondamental secondaire sclérifié (Tf^{2i}). Dans les faisceaux réparateurs (A'A''BCD), le bois secondaire est, au contraire, normalement développé (B^2). Le sclérenchyme comprend, outre le Tf^{2i} des faisceaux foliaires, des arcs fibreux au dos de tous les faisceaux et une gaine circulaire sous l'endoderme (fig. 55).

Les feuilles suivantes étant beaucoup plus grandes, les faisceaux foliaires qui leur correspondent contiennent du bois secondaire (fig. 56) Dans cette portion de tige, le sclérenchyme est formé par quelques éléments de la moelle, par des arcs fibreux en avant des faisceaux, par des massifs fibreux au dos des faisceaux foliaires et enfin par un certain nombre de cellules appartenant au parenchyme cortical (fig. 56).

Comparée à la figure 55, la coupe représentée par la figure 56 diffère donc notablement au point de vue de l'origine des tissus de soutien.

STRUCTURE DE LA DERNIÈRE FEUILLE AVANT LA PÉRULE.

Cette feuille mesure 26 centimètres de longueur. La gaine, notablement plus longue que celle de la feuille [1], présente deux expansions latérales que nous considérons comme des rudiments de stipules. Le pétiole (Pét.), prismatique et creux, se continue par un rachis primaire (Rach. [1]) portant deux rachis secondaires (Rach. [2]); il y a neuf folioles pétiolulées (fig. 57).

La section transversale, à la base de la gaine, rencontre onze faisceaux (fig. 58) :

$$m'mm'LiMiLm'mm'.$$

Dans l'étendue de la gaine, ces faisceaux s'unissent entre eux de distance en distance par des anastomoses obliques. Le faisceau m', le plus voisin du bord droit, se perd dans l'une des expansions latérales de la gaine (stipule rudimentaire), tandis que le faisceau m' correspondant du côté gauche disparait par anastomose avec le faisceau m voisin. De sorte que, au sommet du pétiole, il n'y a que neuf faisceaux. Mais un dixième faisceau prend bientôt naissance, le faisceau O, aux dépens du faisceau m' du côté droit (fig. 59). Cette structure se maintient dans toute l'étendue du pétiole.

Dans le rachis primaire, on ne retrouve que cinq faisceaux

$$mLMLm$$

qui se prolongent jusque dans le pétiolule de la foliole terminale.

Chacun des rachis secondaires contient cinq faisceaux, savoir : un médian qui n'est autre que l'un des faisceaux *m'* du pétiole et quatre autres faisceaux insérés deux à deux sur les faisceaux L et *m* du pétiole (fig. 60).

Chacun des pétiolules des folioles voisines de la foliole terminale contient quatre faisceaux seulement, qui sont insérés deux à deux sur les faisceaux L et *m* du rachis primaire (fig. 61).

La figure 62 reproduit, d'après les coupes précédentes, le parcours des faisceaux dans la gaine, le pétiole et le rachis primaire, ainsi que l'insertion des rachis secondaires et des pétiolules. On y remarquera le faisceau *m'* du bord droit de la gaine qui se termine en pointe libre dans la stipule rudimentaire de droite ; le faisceau O est indiqué par un trait pointillé ; à l'endroit marqué « niveau de la fig. 60 » se trouve l'insertion des rachis secondaires, et à l'endroit marqué « niveau de la fig. 61 », l'insertion des pétiolules.

Quant à la structure des folioles, elle présente les mêmes particularités anatomiques que celle de la feuille [1], sauf qu'il n'y a pas de glande à eau.

PHYLLOTAXIE.

Le tableau suivant indique, d'une façon approximative, les divergences foliaires dans la tige principale étudiée ci dessus :

Cot. *a*	
	> 180°
Cot. *p*	
	> 90°
Feuille ^{1}	
	> 180°
Feuille ^{2}	
	> 120°
Feuille ^{3}	
	> 170°
Feuille ^{4}	
	> 140°
Feuille ^{5}	
	> 155°
Feuille ^{6}	
	> 170°
Feuille ^{7}	
	> 150°
Feuille ^{8}	
	> 115°
Feuille ^{9}	
	> 170°
Feuille ^{10}	
	> 165°
Feuille ^{11}	
	> 165°
Feuille ^{12}	

STADE V.

Plante vers la fin de la deuxième année.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Nous avons décrit précédemment les caractères extérieurs des plantes à la fin de la première année (stade IV). Pendant l'hiver, ces plantes perdent leurs feuilles et leur bourgeon terminal hiverne à l'abri de la pérule.

Au printemps suivant, la tige principale continue son développement. Vers la fin de la deuxième année, en juillet, on peut constater que les jeunes plantes sont assez inégalement développées : les unes, vigoureuses, ont fleuri; les autres, moins fortes, ne portent que des feuilles.

Dans les premières, la tige principale s'est allongée au point de mesurer près de 1 mètre de hauteur. Cette tige comprend deux régions.

La première région, qui s'est formée pendant le premier été (quelques centimètres de longueur), a perdu ses feuilles; elle est devenue presque entièrement souterraine. Cette région souterraine est garnie de très nombreuses racines et porte quatre ou cinq gros bourgeons axillaires destinés à passer l'hiver suivant : ce sont des bourgeons de remplacement.

La seconde région, qui s'est développée pendant la deuxième saison, comprend elle-même trois portions. La première, longue de 4 centimètres environ, est formée de cinq ou six segments dont l'entre-nœud est court et dont la feuille porte dans son aisselle un rameau grêle, non florifère. La deuxième portion, longue de 35 centimètres, comprend quatre ou cinq segments dont l'entre-nœud est très long et la feuille très ample; les bourgeons axillaires sont restés latents. Enfin, la troisième portion,

longue de 55 centimètres, porte des feuilles bractéiformes ([1]), des bractées et des axes florifères.

Les racines, très nombreuses, sont presque toutes de même longueur (30 à 35 centimètres) et de même grosseur (1 à 2 millimètres); elles sont peu ramifiées, les radicelles étant très grêles.

Les bourgeons souterrains destinés à passer l'hiver sont épais, longs déjà de 20 à 25 millimètres; ils portent des feuilles écailleuses, jaunes, imbriquées, sans pétiole ni limbe; la dernière de ces feuilles forme pérule avec limbe rudimentaire.

Les feuilles les plus développées de la tige aérienne mesurent de 20 à 28 centimètres de longueur; elles possèdent une gaine courte, deux stipules vascularisées, six paires de rachis secondaires, dont les deux inférieurs sont eux-mêmes quatre fois divisés. La feuille la plus complète comptait 137 folioles.

Les feuilles bractéiformes, de plus en plus courtes et de plus en plus simples, passent insensiblement aux bractées réduites, elles, à cinq, à trois et même à une seule foliole.

Les plantes qui n'ont pu fleurir pendant la deuxième année, ont une tige principale plus ou moins longue, deux ou trois bourgeons destinés à passer l'hiver, de longues racines sur la portion souterraine de cette tige et enfin des feuilles plus ou moins développées sur la portion aérienne. D'autres encore, victimes de la lutte pour l'existence, sont réduites à une tige excessivement grêle portant un seul petit bourgeon hivernant, quelques minces racines et deux ou trois feuilles délicates et grêles.

Selon les conditions climatériques, la fertilité du sol et les circonstances de la lutte des plantules entre elles, le *Thalictrum flavum* arrive à l'état adulte, c'est-à-dire à fleurir, après deux ou trois années; il pourrait peut-être y arriver après une seule année, dans des conditions exceptionnellement favorables. La

([1]) Nous désignerons sous le nom de *feuilles bractéiformes* des feuilles intermédiaires, par leur taille, leur forme et leur situation, entre les grandes feuilles végétatives situées à la base de la région aérienne des tiges et les bractées de l'inflorescence.

végétation de cette espèce se rapprocherait donc tantôt de celle des plantes annuelles, tantôt de celle des plantes vivaces fleurissant chaque saison ou ne fleurissant qu'après plusieurs années.

Notre étude anatomique des plantes à la fin de la deuxième année portera uniquement sur des individus florifères.

STRUCTURE DE LA TIGE PRINCIPALE.

La première région de la tige principale, correspondant à la pousse de la première année, est identique à ce qui a été dit ci-dessus au stade IV.

La deuxième région, correspondant à la pousse de la deuxième année, comprend, avons-nous dit, trois portions.

La première est formée d'un petit nombre de segments semblables à ceux qui se sont formés à la fin de la première année, c'est-à-dire qu'ils contiennent une trentaine de faisceaux avec une trace foliaire de neuf ou dix faisceaux. Le sclérenchyme forme des massifs voisins du bois primaire et d'autres contre le liber primaire (fig. 63).

La deuxième portion ne comprend également qu'un petit nombre de segments, mais ceux-ci sont très vigoureux; on peut y compter, en effet, cinquante-six faisceaux avec une trace foliaire de douze faisceaux (fig. 64) :

$$m'mm'\mathrm{LiMiL}m'mm'm''.$$

Nous rencontrons ici, pour la première fois, une disposition qui devient la règle dans la plante adulte : les faisceaux foliaires situés sous les côtes de la tige ont une section pointue et s'avancent notablement vers le centre, tandis que les autres faisceaux ont une section arrondie et sont plus ou moins reportés vers l'extérieur.

Remarquons également qu'il n'y a plus de sclérenchyme dans le voisinage du bois primaire; le parenchyme médullaire est ordinairement creusé d'une vaste lacune centrale.

La troisième et dernière portion (inflorescence) comprend un

grand nombre de segments dont l'organisation va successivement en décroissant. Le nombre des faisceaux, qui peut être encore de trente-huit au bas de l'inflorescence (fig. 65), se réduit à vingt (fig. 66), puis à dix (fig. 67) et enfin à cinq tout à l'extrémité de l'inflorescence (fig. 68).

Les premières bractées, en effet, reçoivent cinq faisceaux (fig. 65), les suivantes trois (fig. 66), les dernières enfin un seul (fig. 67 et 68).

En résumé : Durant la deuxième année, la tige principale produit d'abord des segments très vigoureux, puis des segments de plus en plus simplifiés, ces derniers correspondant à l'inflorescence. La succession des feuilles reflète cette évolution. Le nombre des faisceaux, qui est de douze à la base des feuilles les plus amples, se réduit à cinq dans les premières bractées et à un seul dans les dernières.

STRUCTURE DES FEUILLES.

Les feuilles au stade V sont semblables à celles de la plante adulte dont les caractères seront décrits dans le chapitre suivant.

STRUCTURE DES RACINES.

A la fin de la seconde année de végétation, les racines sont toutes adventives et insérées sur la portion souterraine de la tige. Longues de 30 à 35 centimètres sur 1 ou 2 millimètres de diamètre, elles portent quelques radicelles très grêles et sont recouvertes de nombreuses papilles absorbantes.

Une section transversale pratiquée vers le milieu de l'une de ces racines montre (fig. 69) :

Un faisceau à trois pôles ligneux primaires ne se joignant pas, alternant avec autant de pôles libériens primaires. Le centre est occupé par des fibres primitives à parois minces, laissant entre elles des méats. Trois arcs cambiaux (Cb), apparus entre le bois primaire (B^1) et le liber primaire (L^1), commencent à produire du bois secondaire (B^2) et une grande quantité de parenchyme libérien secondaire avec cellules grillagées (L^2). Trois

ponts de cambiforme (Cbf), réunissant les trois arcs cambiaux, ont produit du tissu fondamental secondaire externe (Tf^2e), très abondant et parenchymateux (fig. 70).

Le péricycle (Péric.) recloisonné a produit une zone plus ou moins collenchymateuse contre laquelle s'appuient les massifs libériens primaires très reconnaissables.

Le parenchyme cortical persiste et comprend une dizaine d'assises de cellules. L'assise profonde est un endoderme (End.) très bien caractérisé, avec plissements sur les cloisons radiales et épaississements des cloisons externes. Les cellules endodermiques se sont recloisonnées plusieurs fois, comme le montre aussi très bien la coupe longitudinale radiale (fig. 71).

L'assise pilifère porte des papilles absorbantes très nombreuses.

L'assise sous-pilifère est formée de cellules à parois épaissies, légèrement plissées radialement et marquées de ponctuations extrêmement nombreuses et petites qui leur donnent un aspect finement chagriné caractéristique.

Les autres couches cellulaires du parenchyme cortical sont pour la plupart écrasées. On distingue par-ci par-là quelques cellules fortement sclérifiées (Sclér.) (fig. 70).

Il existe également des racines adventives à quatre pôles.

Les coupes transversales successives pratiquées dans le sommet végétatif de la racine nous ont fait assister, par le processus habituel, à l'origine des différents tissus précités. Notons cependant que la différenciation libérienne précède de beaucoup la différenciation ligneuse et que l'endoderme ne se caractérise que très tard, alors que les différenciations libérienne et ligneuse sont déjà bien avancées.

A l'état adulte, les racines des plantes arrivées au stade V contiennent toujours très peu de tissus secondaires et conservent leur parenchyme cortical.

Quant aux radicelles, elles ont deux, trois ou quatre pôles et ne développent jamais de productions secondaires.

CHAPITRE III.

PLANTE ADULTE.

§ 1. LES TIGES.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Après avoir fleuri, la partie aérienne de la tige principale se détruit à la fin de la deuxième saison ; la partie souterraine hiverne et les bourgeons qu'elle porte se développent au printemps suivant. Les mêmes phénomènes se continuant chaque année nous conduisent à la plante adulte telle qu'on la rencontre ordinairement dans la nature.

Le *Thalictrum flavum* habite les prairies inondées en hiver ; il forme de larges touffes ou colonies occupant chacune une superficie de 3 à 4 mètres carrés. Il est difficile de dire si chacune de ces colonies provient d'un seul individu de semis.

En fouillant le sol avec soin, on trouve des tiges souterraines ou drageons (Drg.) courant horizontalement à une profondeur de 10 à 15 centimètres. Elles peuvent mesurer 50 ou 70 centimètres de longueur et présenter un grand nombre de segments à long entre-nœud (3 à 8 centimètres), à feuille rudimentaire et à bourgeon axillaire latent. De nombreuses racines sont également insérées aux nœuds (fig. 72).

A l'arrière-saison, ces tiges souterraines se relèvent légèrement à leur extrémité, qui est terminée par un bourgeon protégé par plusieurs feuilles pérulaires.

Au printemps suivant, ce bourgeon terminal reprenant son développement produit une tige primaire ($Tg.^1$) aérienne, verticale et florifère, qui peut atteindre près de 2 mètres de hauteur.

Celle-ci comprend elle-même trois portions : la première, souterraine encore, présente un petit nombre de segments à entre-nœud court et à feuille se développant dans l'air ; la deuxième portion, déjà aérienne, montre quelques segments à entre-nœud long, puis très long et à feuille très ample ; enfin, la troisième portion renferme tous les autres segments à entre-nœud de plus en plus court, portant des feuilles bractéiformes passant aux bractées de plus en plus petites.

Sur la partie de la tige souterraine qui se relève pour sortir du sol, les bourgeons axillaires se comportent de diverses manières : les uns se développent en tiges secondaires dressées et aériennes dès la première année (*Tg.*[2] *aér.*, fig. 72 et 73). D'autres se développent en tiges secondaires courtes et terminées par un bourgeon pérulé; ces axes sont destinés à hiverner dans le sol pour en sortir seulement au printemps suivant (*Tg.*[2] *hiv*, fig. 73). D'autres enfin se développent en longues tiges souterraines qui s'étendent horizontalement et qui sont des drageons identiques à ceux qui nous ont servi de point de départ (*Drg. nouveau*, fig. 74). Comme eux, ils sortiront de terre et produiront de nouvelles ramifications, les unes aériennes, les autres souterraines, dressées ou rampantes.

STRUCTURE.

A. PARCOURS DES FAISCEAUX.

Nous allons considérer successivement : la portion souterraine drageonnante, la portion souterraine qui se relève pour sortir du sol, la portion inférieure de la tige aérienne, et enfin la portion supérieure florifère.

I. Portion souterraine drageonnante.

Une section transversale pratiquée dans l'entre-nœud [3] (fig. 78, pl. VIII) montre vingt faisceaux sensiblement de même grosseur et disposés sur un seul cercle. Parmi ces faisceaux, on peut

en distinguer dix qui constituent la trace foliaire complète de la feuille [3], savoir :

$$(m'mm'\mathrm{L}i\mathrm{M}i\mathrm{L}mm')^{3}\ (^{1}).$$

Ces dix faisceaux peuvent se reconnaître à leur situation sous les côtes de la tige (lesquelles sont en réalité peu marquées); ils sont aussi situés un peu plus vers l'extérieur que les autres. Les dix autres faisceaux sont réparateurs.

La figure 94, planche XII, permet de se faire une idée du trajet des vingt faisceaux de la coupe précédente :

Les dix faisceaux de la trace foliaire, après un trajet rectiligne, sortent dans la feuille, tandis que les autres faisceaux se bifurquent ou se trifurquent de façon que, dans l'entre-nœud suivant, vingt faisceaux existent encore dont dix constituant la trace foliaire complète du nœud [4]. C'est dans le nœud également que les faisceaux gemmaires apparaissent de chaque côté des faisceaux sortants. Il y a peu d'anastomoses dans la moitié supérieure du nœud.

La divergence entre la feuille [3] et la feuille [4] est de près de 180°.

Des racines nombreuses sont insérées dans la première moitié du nœud : il y en a une ou deux dans l'intervalle entre tous les faisceaux.

II. Portion souterraine qui se relève pour sortir du sol.

Cette portion diffère peu de la précédente. La section transversale (fig. 79, pl. VIII) pratiquée dans l'entre-nœud [18] contient cinquante-neuf faisceaux dont treize formant la trace foliaire. Ces faisceaux foliaires se distinguent aisément des autres fais-

(1) Dans un travail qu'il se propose de publier prochainement, M. le professeur A. Gravis exposera des considérations générales sur la nomenclature des faisceaux foliaires. J'ai cru utile d'adopter dès maintenant cette nomenclature, comme l'a fait également M. C. Lenfant dans son mémoire sur le genre *Delphinium*, *loc. cit.*

ceaux par leur forme et leur position. Alternant avec les faisceaux de la trace foliaire, il y a ici des groupes réparateurs et non pas de simples faisceaux réparateurs comme dans la portion précédente. Chaque groupe réparateur comprend de un à cinq faisceaux inégaux et inégalement rapprochés du centre de la tige. Parmi eux se trouvent déjà indiqués un certain nombre de faisceaux foliaires du nœud ^{19} et du nœud ^{20}.

Quant au parcours (voir fig. 85, pl. IX), il ressemble davantage à celui qui va être étudié dans la portion aérienne.

La divergence entre la feuille ^{18} et la feuille ^{19} est de 157°.

III. Portion aérienne inférieure.

Une section transversale pratiquée dans l'entre-nœud ^{24} (fig. 80, pl. VIII) montre septante-neuf faisceaux de grosseur très diverse et disposés sur plusieurs rangs, les plus petits étant les plus extérieurs. Parmi ces faisceaux, on peut distinguer :

1° Quinze faisceaux constituant la trace foliaire complète de la feuille ^{24}

$$(m'mm'\mathrm{L}ii'\mathrm{M}i'i\mathrm{L}m'mm''m'm'')^{24}.$$

Ces quinze faisceaux présentent des caractères spéciaux qui permettent de les reconnaître aisément. Ils sont adossés au sclérenchyme périphérique et chacun d'eux correspond exactement à une côte saillante de la tige. Ces faisceaux se composent d'une longue pointe de bois primaire, d'un massif de bois secondaire qui embrasse partiellement le liber par sa zone cambiale;

2° Alternant avec ces quinze faisceaux de la trace foliaire, il y a quinze groupes réparateurs formés de faisceaux très inégaux et disposés sur plusieurs rangs. Parmi ceux-ci, treize faisceaux constituent la trace foliaire, complète également, de la feuille ^{25}

$$(m'mm'\mathrm{L}i\mathrm{M}i'i\mathrm{L}m'mm'm'')^{25}.$$

Ces faisceaux ont une section de forme ovale à pointe arrondie; ils sont isolés, sauf les plus petits qui sont adossés au slérenchyme.

Treize autres faisceaux encore constituent la trace foliaire de la feuille [26]

$$(m''m'mm'\mathrm{L}i\mathrm{M}i\mathrm{L}m'mm'm'')^{26}.$$

Tous les autres faisceaux de la coupe transversale de l'entre-nœud appartiennent aux traces foliaires des feuilles 27, 28, 29, 30, etc.; mais ces traces foliaires successives sont, à ce niveau, de plus en plus incomplètes.

La figure 81 représente la coupe faite un peu au-dessus du nœud [24], un peu au-dessus de l'insertion de la feuille et du bourgeon. On peut aisément la comparer à la coupe précédente pratiquée dans l'entre-nœud au-dessous.

C'est l'examen des coupes successives dans une série de segments consécutifs qui a permis de faire les déterminations indiquées dans les figures 80 et 81, ainsi que dans le parcours correspondant reproduit à la figure 86, planche X.

Dans cette dernière figure, on remarquera d'abord les faisceaux de la trace foliaire du segment [24] qui, après un trajet rectiligne sans aucune ramification, sortent au niveau de la feuille [24]. Les autres faisceaux ont également un trajet rectiligne ; ils se ramifient de temps en temps pour donner naissance à de nouveaux foliaires destinés à des feuilles situées beaucoup plus haut. Les faisceaux gemmaires sont ici très nombreux et insérés plus bas le long des foliaires ou des réparateurs.

Quant à la divergence foliaire, elle est, dans la région étudiée, de 150° environ.

IV. Portion aérienne supérieure (inflorescence).

La portion de la tige qui forme l'axe général de l'inflorescence comprend un grand nombre de segments dont l'organisation va successivement en décroissant. On retrouve ici toutes les particularités signalées dans l'inflorescence de la tige principale au stade IV.

Une coupe transversale dans l'entre-nœud du segment [31] situé

à la base de l'inflorescence (fig. 92, pl. VIII) montre soixante faisceaux dont une trace foliaire

$$(m'mm'\mathrm{L}i\mathrm{M}i\mathrm{L}m''m'mm')^{31}.$$

Alternant avec ces douze faisceaux, douze groupes réparateurs composés de trois à six faisceaux, parmi lesquels la trace foliaire du nœud ^{32} et celle du nœud ^{33}.

La première bractée reçoit donc douze faisceaux, la deuxième onze, la troisième neuf et ainsi de suite. Plus haut, dans l'inflorescence (fig. 83), la tige ne contient plus que dix faisceaux et la bractée n'en reçoit qu'un seul faisceau M.

B. INSERTION DES TIGES AXILLAIRES.

On peut distinguer deux sortes de bourgeons axillaires : ceux qui donnent naissance à des tiges feuillées et ceux qui forment les rameaux de l'inflorescence.

A. — Les premiers naissent sur les tiges souterraines, ainsi que sur le bas des tiges aériennes.

Dans les nœuds souterrains, le nombre des faisceaux gemmaires est double de celui des faisceaux foliaires ; les gemmaires y sont en effet insérés, un à droite et un à gauche de chaque foliaire, un peu au-dessous du niveau de la sortie (fig. 94, pl. XII).

Dans les nœuds aériens, le nombre des faisceaux gemmaires est environ le triple de celui des faisceaux foliaires ; ils sont insérés notablement plus bas, non sur les foliaires, mais sûr d'autres faisceaux voisins (pl. X).

Pour sortir de la tige mère, les faisceaux gemmaires ne traversent pas le parenchyme médullaire, comme ils le font dans le *Ranunculus arvensis*, mais ils courent horizontalement dans le parenchyme externe et forment une ceinture très visible dans la moitié supérieure du nœud. Lorsque les coupes transversales successives sont minces, on n'observe qu'une partie des faisceaux

gemmaires sortants (fig. 95, pl. XII); lorsque, au contraire, la coupe transversale est suffisamment épaisse, on voit la ceinture gemmaire complète (fig. 96).

On peut aussi fendre un nœud longitudinalement, l'étaler et le rendre transparent par l'eau de Javelle : on obtient ainsi une préparation dont la figure 98 donne une idée. Pour ne pas compliquer cette figure, les faisceaux foliaires et les faisceaux gemmaires ont seuls été représentés.

B. — Les bourgeons axillaires qui donnent naissance aux rameaux de l'inflorescence apparaissent à l'aisselle des bractées, vers le haut des tiges aériennes. L'insertion de ces bourgeons est beaucoup plus difficile à débrouiller que celle des autres bourgeons. On ne constate pas de ceinture gemmaire, la sortie des faisceaux destinés au bourgeon se faisant néanmoins par l'extérieur.

Avant de se détacher complètement de la tige mère, le rameau produit lui-même un autre rameau, de telle sorte que, dans l'aisselle d'une bractée, on observe généralement deux ou trois axes courts, très ramifiés et florifères. L'insertion de l'axe de troisième ordre sur celui de deuxième ordre se faisant lorsque ce dernier n'est pas encore séparé de la tige primaire, on ne constate pas l'existence d'appendice au nœud de cette insertion.

C. HISTOLOGIE.

Nous ferons connaître l'histologie de chacune des quatre portions distinguées dans la tige adulte, ainsi que celle de la ceinture gemmaire.

I. Portion souterraine drageonnante.

La figure 78, planche VIII, donne une vue d'ensemble de la section à ce niveau; la figure 87, planche XI, indique tous les détails histologiques grossis davantage.

En avant de chaque faisceau, les fibres primitives sclérifiées

forment un arc scléreux interne (*Sclér. int.*). Le bois primaire (B^1) est constitué de trachées peu nombreuses. Les vaisseaux du bois secondaire (B^2) sont entremêlés d'éléments à parois minces. La zone cambiale (Cb) a produit aussi du liber secondaire (L^2) renfermant de grandes cellules grillagées ([1]). Le liber primaire (L^1) bien conservé possède des cellules grillagées assez petites, accompagnées de cellules annexes. En arrière de chaque faisceau, un massif de sclérenchyme forme un arc scléreux externe (*Sclér. ext.*).

La gaine, parfaitement continue, large de deux à quatre assises cellulaires sans méats, est constituée d'éléments prismatiques à parois épaisses et ponctuées, mais non sclérifiées; leur aspect est plutôt collenchymateux (voyez *Gaine coll.* dans la fig. 87). Le chlorure de zinc iodé colore assez difficilement cette gaine : sur les coupes convenablement hydratées, ce réactif donne cependant une coloration franchement bleue alors que les arcs scléreux internes et externes se colorent nettement en jaune.

Au delà de la gaine, il n'existe plus qu'une couche subéreuse assez mince (*Sub.*).

La moelle ($T/^{li}$), en grande partie résorbée, est creusée d'une vaste lacunc centrale. Il y a également des lacunes externes entre les faisceaux dans le voisinage du liber (*Lac. ext.* dans fig. 78, pl. VIII, et fig. 87, pl. XI) ; ces lacunes s'étendent parfois dans tout le tissu interfasciculaire, de telle façon que les faisceaux semblent suspendus dans une cavité centrale étoilée.

D'autres fois, au contraire, dans les grosses tiges drageonnantes, tous les arcs scléreux internes sont réunis en une zone sinueuse continue entourant ce qui reste de la moelle (voyez *Sclér. int.*, fig. 84, pl. VIII).

Les coupes longitudinales montrent que les cellules des arcs scléreux externes sont prismatiques (fig. 91, pl. XI), tandis que les cellules sont fibreuses dans les arcs scléreux internes (fig. 93);

([1]) M. C.-V. Gernet (*loc. cit.*) déclare n'avoir jamais rencontré de cellules grillagées dans le liber du *Thalictrum flavum*.

toutes les cellules du sclérenchyme sont d'ailleurs marquées de ponctuations obliques. Les premiers vaisseaux sont rayés, les autres sont aréolés (fig. 92) : les cellules vasculaires, assez longues, laissent voir, après leur fusion, un reste de la cloison transversale sous la forme d'un anneau saillant à l'intérieur du vaisseau.

II. Portion souterraine qui se relève pour sortir de terre.

Cette portion diffère de la précédente par les particularités histologiques suivantes (fig. 79, pl. VIII, et fig. 88, pl. XI) :

Il n'y a pas d'arcs scléreux internes; par contre, les fibres ligneuses entremêlées aux vaisseaux du bois secondaire ont des parois fortement épaissies. La gaine est formée d'éléments très nettement sclérifiés. Le parenchyme cortical est en grande partie mortifié et écrasé : on y retrouve l'assise sous-épidermique et l'assise profonde contre la gaine. Cette assise profonde ne possède pas les plissements caractéristiques de l'endoderme. L'épiderme a subsisté et il n'y a pas de suber.

Dans les diaphragmes nodaux, comme dans ceux de la tige au stade IV, certaines cellules de la moelle possèdent des parois épaisses, sclérifiées et canaliculées (fig. 90).

III. Portion aérienne inférieure.

Les caractères histologiques propres à cette portion sont les suivants (fig. 80, pl. VIII, et fig. 89, pl. XI) :

La zone cambiale des faisceaux est arquée autour du liber. Le sclérenchyme de la gaine est très développé, comme aussi celui des arcs scléreux externes adossés à la gaine.

Le parenchyme cortical est bien conservé : son assise profonde est sans plissements ; les suivantes contiennent de la chlorophylle; l'assise sous-épidermique est collenchymateuse. L'épiderme, fortement cutinisé, est garni de stomates.

IV. Portion aérienne supérieure (inflorescence).

Au point de vue histologique, cette portion diffère à peine de la précédente (fig. 82, pl. VIII). On peut cependant noter que l'épiderme ne présente plus de stomates et que le parenchyme cortical ne renferme plus de chlorophylle.

Structure des portions aériennes de la tige comparée à celle des portions souterraines.

M. J. Costantin (¹) a étudié d'une façon spéciale ce qu'il a nommé le « passage de la tige aérienne au rhizome » dans le *T. minus* à l'effet de mettre en évidence l'influence du milieu sur la structure de la tige. Parmi les conclusions que l'auteur a cru pouvoir tirer de ses observations, il y en a deux au sujet desquelles certaines restrictions sont à faire :

1° D'après M. J. Costantin, « l'anneau de fibres existant à la périphérie du cylindre central » de la tige aérienne (= la gaine) disparaît dans la tige souterraine pour faire place à une couche subéreuse. Notre figure 87, planche XI montre clairement que la gaine est encore présente dans la portion souterraine, mais que ses éléments ne sont pas sclérifiés; le suber s'est formé *en dehors* de la gaine, dans la partie la plus profonde du parenchyme cortical;

2° M. J. Costantin indique aussi que « les faisceaux sont sur plusieurs cercles dans la tige aérienne et sur un seul cercle dans le rhizome ».

Nous pensons que la disposition des faisceaux ne dépend du milieu que d'une façon très indirecte.

Les régions qui portent des feuilles très amples contiennent un grand nombre de faisceaux qui, en raison même de leur nombre, se disposent sur plusieurs rangs, tandis que les régions qui ne produisent que des feuilles petites ou rudimentaires

(¹) *Loc. cit.*, p. 95.

renferment peu de faisceaux rangés en un seul cercle. Aussi voyons-nous les premiers segments de la tige principale, *quoique aériens*, posséder des faisceaux sur un seul cercle parce que la trace foliaire des premières feuilles, toujours très petites, ne comprend que trois ou cinq faisceaux. C'est seulement pendant la seconde année que les faisceaux plus nombreux commencent à se disposer sur plusieurs cercles, dans la portion de la tige principale qui porte des feuilles à trace foliaire composée d'une douzaine de faisceaux (voir fig 64, pl. VI).

Inversement, certains segments, *quoique souterrains*, peuvent contenir des faisceaux nombreux rangés sur plusieurs cercles. Tel est le cas de la portion souterraine qui se relève pour sortir de terre dans la plante adulte (fig. 79, pl. VIII), portion qui porte de grandes feuilles, aériennes grâce à leur long pétiole.

On comprendra, d'ailleurs, que l'arrangement des faisceaux dépend non seulement de leur nombre, mais encore du diamètre de la tige avant l'apparition des tissus secondaires.

Il est à remarquer aussi que M. J. Costantin en comparant des coupes pratiquées depuis la partie aérienne vers la partie souterraine, a décrit les modifications anatomiques comme si la tige croissait de l'air dans la terre! Notre marche de la base vers le sommet de chaque tige est plus logique puisqu'elle suit l'axe dans la direction de sa croissance : elle permet de reconnaître, en même temps que l'influence très réelle du milieu, les variations plus considérables encore que les divers segments d'une tige peuvent présenter dans un milieu constant. M. A. Gravis a mis en lumière ces variations, qui dépendent de l'accroissement continu de la vigueur d'une plante en végétation (1). Si M. J. Costantin avait suivi la marche ascendante, depuis la partie souterraine de la tige jusqu'à la partie aérienne, il aurait constaté que les faisceaux deviennent plus nombreux et se rangent sur plusieurs cercles lorque la tige n'a pas encore quitté le sol et

(1) *Recherches analomiques sur les organes végétatifs de l'Urtica dioïca*, dans les Mémoires in-4° de l'Académie royale de Belgique, tome XLVII (1884), pp. 75, 92, 106 et 218.

que par suite cette modification ne peut être attribuée à l'influence du milieu aérien.

M. G. Bonnier [1] s'est occupé également de l'anatomie du *T. minus :* il a insisté sur « les différences frappantes » que présente la structure du « rhizome » comparée à celle de « la base souterraine de la tige florifère ». A la planche XIV de son travail, il a représenté, par des « photographies directes sur cuivre », une coupe de chacun de ces deux niveaux, en faisant remarquer que ces niveaux ne sont distants l'un de l'autre que de quelques millimètres seulement et qu'ils sont situés tous deux sous la surface du sol. Dans le rhizome (notre première portion de la tige primaire), l'auteur reconnaît « la couche génératrice donnant du bois vers l'intérieur, sur un seul cercle, et du liber vers l'extérieur ». A la base de la tige florifère sous terre (notre deuxième portion), il trouve au contraire de « nombreux faisceaux sur plusieurs cercles sans formations secondaires. »

« On ne saurait, dit M. G. Bonnier, donner d'exemple plus net pour faire voir le peu d'importance que présentent les caractères de la structure de la tige, lorsqu'on veut distinguer les Monocotylédones des Dicotylédones ». Cette affirmation paraît bien surprenante sous la plume de l'un des représentants de l'École française à laquelle on doit les premières recherches sur les caractères anatomiques qui distinguent les Monocotylées des Dicotylées.

D'après M. G. Bonnier, la tige florifère se distinguerait donc par deux particularités : la disposition des faisceaux sur plusieurs cercles et l'absence de tissus secondaires. Quelle valeur faut-il attribuer à ces deux caractères?

Le premier est réel : il résulte de ce que la base de la tige florifère porte de grandes feuilles rapprochées les unes des autres, tandis que le rhizome ne produit que des feuilles rudimentaires espacées. D'ailleurs, on connaît aujourd'hui nombre de Dycotylées possédant des faisceaux rangés sur plusieurs cercles.

[1] *Loc. cit.*, p. 390.

Le deuxième caractère, au contraire, est contestable. Dans le *T. flavum*, nous avons constaté un arc de cambium dans tous les faisceaux et à *tous les niveaux*. Nos figures 87 et 89, planche XI, prouvent l'existence du cambium aussi bien dans la portion aérienne que dans la portion souterraine. Il en est de même dans le *T. minus*. Le cambium ne forme pas, il est vrai, une zone génératrice circulaire et continue; il est seulement intrafasciculaire. Tous les auteurs ont admis son existence dans les Renonculacées. Quant aux tissus secondaires issus de l'activité génératrice du cambium, ils sont ici toujours intrafasciculaires et parfois si peu abondants qu'ils ne sont représentés que par quelques vaisseaux aréolés.

En regardant à la loupe la figure 1, planche XIV, de M. G. Bonnier, on peut reconnaitre des traces non équivoques de l'arc cambial dans chaque faisceau, notamment dans la partie gauche de la photographie, bien que le grossissement soit manifestement insuffisant. Si dans la figure 2 de cette même planche, le cambium et les tissus secondaires sont plus apparents, cela provient de ce que cette figure représente le rhizome, c'est-à-dire la partie vivace, tandis que la première représente la partie fugace, la tige florifère, qui disparaîtra après la fructification.

M. J. Costantin [1] a admis l'existence du bois secondaire dans les faisceaux intérieurs de la tige aérienne du *T. minus*, mais sa figure 70 de la planche VI ne rend pas avec assez de netteté l'aspect des arcs cambiaux.

M. P. Marié [2] a reconnu un « cambium net » dans les faisceaux de la tige aérienne du *T. aquilegifolium* et l'a représenté pour celle du *T. angustifolium* (fig. 20).

M. E. Strasburger [3] a figuré avec toute la précision désirable le cambium d'un faisceau de la tige du *Ranunculus repens*, mais il a, croyons-nous, trop limité l'activité cambiale en ne considé-

(1) *Loc. cit.*, p. 174.
(2) *Loc. cit.*, p. 34.
(3) *Manuel technique d'anatomie végétale*, trad. française (1886), p. 111.

rant comme secondaires que les assises de cellules à parois minces situées contre l'arc générateur.

Malgré certaines ressemblances, plus apparentes que réelles, existant entre l'organisation des *Thalictrum* et celle des Monocotylées (ressemblances qui seront énumérées dans les « Conclusions » à la fin de ce mémoire), nous ne croyons pas qu'il soit permis de confondre la structure d'aucune partie d'un *Thalictrum* avec « la structure ordinaire des Monocotylédones ». Bien comprise, l'anatomie de la tige des *Thalictrum* appartient franchement au type des Dicotylées.

Ceinture gemmaire.

Nous savons déjà que les faisceaux destinés au bourgeon axillaire contournent le nœud en parcourant presque horizontalement le parenchyme cortical et qu'il en résulte une véritable ceinture gemmaire (voir ci-dessus, p. 42). Lorsqu'on examine extérieurement l'insertion d'une forte tige axillaire, on y voit une sorte de croissant qui embrasse la tige mère. Ce croissant se détache de la tige mère lorsqu'on exerce une traction violente sur la tige axillaire (fig. 75, pl. VII).

Une coupe longitudinale pratiquée dans un nœud souterrain, perpendiculairement au plan de symétrie de la feuille, rencontre les faisceaux gemmaires sectionnés *transversalement*. Dans la figure 76, planche VII, on remarquera trois de ces faisceaux à gauche et six à droite. L'un d'eux, reproduit par la figure 97, planche XII, à un grossissement plus fort, montre du bois et du liber, séparés par une zone cambiale, un massif scléreux en avant du bois et un autre en arrière du liber.

Lorsque la tige axillaire est vigoureuse, les faisceaux de la ceinture gemmaire contiennent une forte quantité de tissus secondaires libéro-ligneux, comme on peut en juger par la figure 77, planche VII, qui est un dessin d'ensemble d'une coupe longitudinale faite dans la région où la tige se relève pour sortir du sol : le nœud $^{n+2}$ y présente une ceinture gemmaire fort épaisse dans laquelle les faisceaux sont disposés en rayonnant autour d'un centre.

§ 2. LES FEUILLES.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

La forme des feuilles varie suivant leur position sur la tige. Aux nœuds de la portion souterraine drageonnante des plantes adultes, les feuilles sont rudimentaires, réduites à leur gaine; les stipules font défaut (pl. XIII, fig. 101).

Le long de la portion souterraine qui se relève pour sortir de terre, les feuilles passent insensiblement de la forme précédente à la feuille pérulaire avec pétiole et limbe rudimentaires au sommet de la gaine. Les stipules manquent encore (fig. 102).

Sur la portion aérienne inférieure, les feuilles atteignent leur maximum de complication et de développement. Elles se composent d'une gaine assez développée avec deux stipules adnées (fig. 103), d'un pétiole et d'un rachis primaire portant six paires de rachis secondaires, les deux inférieurs eux-mêmes quatre fois subdivisés. Il y a des stipelles aux premiers nœuds du rachis primaire, des stipellules aux premiers nœuds des rachis secondaires. Ces feuilles, les plus complètes, comptent jusqu'à cent trente-sept folioles.

Ce type foliaire se réduit graduellement à mesure qu'on s'élève le long de la tige dans sa portion aérienne supérieure. On rencontre ainsi des feuilles bractéiformes [1], pourvues de stipules, d'un rachis primaire avec stipelles, de rachis secondaires avec stipellules et de quarante à cinquante folioles; le pétiole n'existe pas, la première paire de rachis secondaires se détachant immédiatement au-dessus des stipules (fig. 108). On passe ensuite insensiblement aux bractées réduites à cinq, trois et même une seule foliole (fig. 109 et 110); ces bractées n'ont pas de pétiole, mais possèdent deux stipules.

Dans les tiges primaires de la plante adulte, le métamorphisme foliaire est donc progressif depuis l'insertion de ces tiges jusqu'à leur portion aérienne inférieure; il est régressif dans toute l'étendue de la portion aérienne supérieure.

[1] Voir note au bas de la page 53.

STRUCTURE.

A. PARCOURS DES FAISCEAUX.

Nous nous bornerons à décrire les principaux niveaux d'une feuille complète de la portion aérienne inférieure.

La section transversale à la base de la gaine (pl. XIV, fig. 113) présente quinze faisceaux :

$$m''m'm\ m'Lii'Mi'iLm'm\ m'm''.$$

Un peu plus haut, deux faisceaux m''' se détachent des faisceaux m'' les plus voisins des bords ; ces faisceaux m''' se ramifient plusieurs fois et se perdent dans les deux stipules.

En s'élevant dans la gaine, tous les faisceaux subissent une sorte de dédoublement qui a pour effet de produire des faisceaux internes en face des faisceaux externes. Toutefois le nombre des premiers est toujours moindre que celui des seconds, à cause des anastomoses nombreuses qui s'opèrent à la face interne du pétiole beaucoup moins large que la face externe. En même temps, une lacune centrale apparaît entre les deux séries de faisceaux. La coupe représentée par la figure 114 a été faite au niveau où commencent ces dédoublements et ces anastomoses : des traits y indiquent la provenance des faisceaux internes. Les mêmes faits se répètent progressivement à travers les faisceaux marginaux (m, m', m''). A la base du pétiole (fig. 115), il y a déjà quarante-deux faisceaux de diverses grosseurs rangés autour d'une cavité centrale. On remarque en outre à ce niveau les deux stipules adnées et vascularisées aux dépens des deux faisceaux m'''. Plus haut, le faisceau M subit à son tour un dédoublement ; d'autres ramifications et des anastomoses nombreuses donnent au pétiole sa structure caractéristique (fig. 116). On y reconnaît une cinquantaine de faisceaux dont un faisceau O issu d'anastomose.

Dans le premier entre-nœud du rachis primaire qui fait suite au pétiole, on retrouve vingt-quatre faisceaux circulairement

disposés autour d'une cavité centrale, gros et petits alternant (fig. 117) :

$$m''m'm''m\ m''m'm''Li'ii'Mi'ii'Lm''m'm''m\ m''m'm''O.$$

Dans les entre-nœuds suivants du même rachis, le nombre des faisceaux diminue de plus en plus.

Insertion des rachis secondaires et des stipules (fig. 118). — Au premier nœud du rachis primaire, chacun des rachis secondaires débute par une vingtaine de faisceaux insérés sur les faisceaux $Lm'mm'$ du pétiole. Les stipelles externes reçoivent quelques faisceaux intermédiaires du pétiole ($i'ii'$). Les stipelles internes reçoivent de même quelques faisceaux issus des faisceaux marginaux du pétiole ($m''m'''$). Ce premier nœud du rachis est extrêmement compliqué : la figure 118 est un schéma. Les deux figures 119 et 120 reproduisant, au contraire, très exactement l'aspect de deux des coupes, donneront une idée des difficultés que présente l'étude de cette région.

Aux deuxième, troisième, quatrième, etc., nœuds du rachis primaire, les rachis secondaires contiennent de moins en moins de faisceaux. L'insertion de ces rachis secondaires et de ces stipelles se fait d'une façon analogue à ce qui vient d'être décrit.

Insertion des rachis tertiaires et des stipellules. — Cette insertion se fait encore de la même manière, mais simplifiée en ce que le nombre des faisceaux est encore plus réduit. Les pétiolules contiennent cinq faisceaux :

$$mLMLm,$$

les deux marginaux pouvant parfois s'anastomoser en un seul (fig. 121).

B. HISTOLOGIE.

Une coupe transversale au milieu du limbe de la feuille adulte montre :

1° *L'épiderme interne,* sans stomates, formé de cellules tabulaires sans chlorophylle, à cuticule épaisse et lisse. Vues de face,

ces cellules ont des contours sinueux. De distance en distance, on retrouve l'insertion d'un poil glanduleux (fig. 122).

2° *L'épiderme externe* à cuticule beaucoup plus mince, avec nombreux stomates formés de deux cellules de bordure au niveau de la surface et surmontés de deux replis saillants de la cuticule. Vu de face, il présente des cellules à contours sinueux, si ce n'est au-dessus des nervures où les parois sont rectilignes, épaisses et ponctuées. Les stomates arrondis n'ont pas de cellules annexes (fig. 123).

3° *Le mésophylle,* constitué par une dizaine d'assises de cellules chlorophylliennes. Les deux assises supérieures, formées de cellules à section carrée plus petites que celles des autres assises, méritent à peine le nom de palissade. Les huit autres assises, formées de cellules irrégulières à grands méats, constituent un mésophylle spongieux. La chlorophylle est régulièrement répartie dans tout le mésophylle. Il n'y a dans la feuille adulte ni glandes ni cristaux.

4° *Les nervures* ne présentent rien de particulier. Un massif de sclérenchyme se trouve entre chaque faisceau et l'épiderme externe dont les cellules ont des parois épaisses et ponctuées.

C. VALEUR MORPHOLOGIQUE DES STIPULES, DES STIPELLES ET DES STIPELLULES.

M. Trecul [1] a soutenu l'homologie de la gaine des monocotylées et des stipules des dicotylées. « Il y a, dit-il, la plus grande analogie entre la formation des stipules foliaires et celle d'une gaine; cette analogie est telle qu'il est impossible de les distinguer dans le principe. »

M. Van Tieghem [2], au contraire, fait de la gaine et des stipules deux choses bien distinctes. Pour ce botaniste, « la gaine

(1) *Mémoire sur la formation des feuilles,* dans les ANNALES DES SCIENCES NATURELLES, Botanique, 3e série, t. XX, 1853. p. 288.

(2) *Traité de Botanique* (1884), p. 308.

est la base dilatée par où la feuille s'attache au pourtour du nœud en embrassant plus ou moins la tige, à la façon d'un étui ». Quant aux stipules, il les considère « comme le résultat d'une ramification très précoce du pétiole ou du limbe à sa base et dans son plan. C'est à proprement parler, dit-il, une première paire de folioles, différenciées le plus souvent par rapport au limbe primaire et par rapport aux autres folioles, s'il s'en produit, et adaptées à une fonction spéciale. Toute feuille pourvue de stipules est donc en réalité une feuille composée. Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que les nervures des stipules vont toujours s'attacher à peu de distance au-dessus de la surface de la tige, aux nervures du pétiole ou du limbe primaire dont elles ne sont que des ramifications ».

M. Lecoyer, dans sa Monographie des *Thalictrum* (1), considère les expansions latérales du pétiole engainant de la feuille des Pigamons, comme des oreillettes et il adopte l'expression de gaine auriculée, considérant, avec Lamarck et de Candolle, le pétiole des *Thalictrum*, comme exstipulé dans le genre entier.

Dans nos recherches sur le *Thalictrum flavum*, nous avons recueilli un certain nombre d'observations qui jettent un peu de jour sur cette question si controversée de l'origine de la gaine, des stipules et des stipelles.

I. Gaine et stipules.

1. *Feuilles de la tige principale.* — Les premières feuilles de la tige principale, celles à trois folioles, présentent une gaine assez courte (5 millimètres environ) surmontée de deux petites expansions non vascularisées (pl. IV, fig. 43). Cette gaine est parcourue dans toute son étendue par trois faisceaux LML qui ne s'y divisent pas (fig. 45).

Les feuilles qui précèdent la pérule, celles à neuf folioles, ont une gaine notablement plus longue (1 centimètre environ)

(1) *Loc. cit.*

présentant encore deux expansions latérales non vascularisées (pl. V, fig. 57). Cette gaine reçoit de la tige onze faisceaux :

$$m'm\ m'\mathrm{L}i\mathrm{M}i\mathrm{L}m'm\ m'$$

qui s'unissent entre eux de distance en distance par des anastomoses obliques. Un des faisceaux, le faisceau m' le plus voisin du bord droit, se perd dans l'une des expansions latérales (fig. 62).

2. *Feuilles de la tige primaire.* — Les feuilles des tiges souterraines drageonnantes sont petites (2 centimètres environ), éeailleuses, réduites à la portion engainante des feuilles complètes (pl. XIII, fig. 101). Il n'y a pas d'expansions latérales. Cette feuille rudimentaire reçoit de la tige onze faisceaux :

$$m'm\ m'\mathrm{L}i\mathrm{M}i\mathrm{L}m'm\ m'$$

qui, dans l'étendue de la gaine, s'unissent par quelques anastomoses obliques et vont se fusionner à son sommet.

Les feuilles pérulaires dc la portion souterraine qui se relève pour sortir de terre ne diffèrent des précédentes que par la présence d'un pétiole et d'un limbe rudimentaires au sommet de la gaine. Pour le reste, même forme, mêmes dimensions et même nervation. Les stipules manquent eneore (fig. 102).

Les feuilles de la portion aérienne inférieure de la tige sont complètes : elles possèdent une gaine assez développée et deux stipules adnées au pétiole. Une des premières feuilles de cette portion reçoit quatorze faisceaux (fig. 103) :

$$m'm\ m'\mathrm{L}i'ii'\mathrm{M}i'i\mathrm{L}m'm\ m'.$$

Les deux faisceaux m' les plus voisins des bords se rendent directement dans les stipules. Une autre feuille (fig. 104) reçoit quinze faisceaux :

$$m''m'm\ m'\mathrm{L}ii'\mathrm{M}i'i\mathrm{L}m'm\ m'm''.$$

La nervation de ses stipules consiste en deux faisceaux m''' *qui*

se détachent des faisceaux pétiolaires les plus rapprochés des bords. Enfin la feuille la plus complète (fig. 105) reçoit vingt faisceaux :

$$m'''m''m'm''m\ m'm''Li'Mi'iLm'm\ m''m'm''m'''.$$

La nervation des stipules consiste en deux faisceaux m^{IV} *qui se détachent,* ici aussi, *des faisceaux pétiolaires.*

Les feuilles de la portion aérienne supérieure (fig. 106) montrent une gaine plus courte surmontée de deux stipules légèrement laciniées, scarieuses à leur extrémité et vascularisées. La nervation de ces stipules est identique à celle de la feuille représentée par la figure 104.

Les feuilles bractéiformes ont une gaine presque nulle, mais, par contre, les stipules sont larges, scarieuses dans leur moitié supérieure, fortement laciniées et vascularisées. On compte à la base neuf faisceaux :

$$m\ m'LiMiLm'm$$

dont les m fournissent bientôt en dehors deux m' qui se ramifient plusieurs fois et se perdent dans les stipules (fig. 107).

Les bractées à trois folioles n'ont plus de gaine visible ; les stipules grandes, laciniées et scarieuses ne sont pas vascularisées. Ces bractées prennent à la tige trois faisceaux LML qui ne se divisent qu'à l'insertion des folioles (fig. 109).

Les bractées à une foliole n'ont pas de gaine, mais possèdent des stipules très grandes et en tout semblables à celles des bractées précédentes. Elles sont parcourues par un seul faisceau M indivis (fig. 110).

En résumé, la gaine et les stipules présentent les modifications suivantes :

1° Dans les feuilles les plus petites des plantules, la gaine, relativement importante, est surmontée de deux petites saillies purement cellulaires, une de chaque côté du pétiole.

2° Dans les feuilles les plus amples de la plante adulte, il y a une gaine courte ou plutôt un pétiole simplement élargi à sa base et deux stipules relativement grandes. Celles-ci reçoivent des faisceaux fournis par les faisceaux marginaux du pétiole.

3° Entre ces deux dispositions, une série d'intermédiaires montrent l'atrophie graduelle de la gaine et le développement de plus en plus marqué des stipules.

4° Dans les bractées, la gaine est nulle ; les stipules très grandes ne sont plus vascularisées, mais l'absence de faisceaux est une conséquence de la nature scarieuse de ces stipules.

Si nous négligeons les bractées à stipules scarieuses et les premières feuilles relativement peu développées, comme celles de la figure 103, nous pouvons dire que « les nervures des stipules vont toujours s'attacher à peu de distance au-dessus de la surface de la tige, aux nervures du pétiole » (voyez fig. 104, 105, 106 et 107). Il nous semble donc impossible de douter encore de l'existence de vraies stipules dans les *Thalictrum*. De plus, il est non moins évident que les stipules des *Thalictrum* procèdent de la gaine. D'où cette conclusion que nous croyons pouvoir tirer, contrairement à l'opinion de M. Van Tieghem, que les stipules des Dicotylées sont homologues à la gaine des Monocotylées.

II. Stipelles.

On les observe principalement sur les feuilles des régions aériennes inférieure et moyenne (feuilles les plus amples); encore ne prennent-elles tout leur développement qu'à la base des trois premières paires de rachis secondaires, c'est-à-dire aux trois premiers nœuds du rachis primaire. A chacun de ces nœuds elles se trouvent au nombre de quatre, dont deux à la face interne (supérieure), assez souvent concrescentes et deux à la face externe (inférieure), toujours libres. Les internes, toujours plus développées que les externes, se présentent ordinairement sous l'aspect d'une lame unique à bords laciniés, recevant à droite et à gauche des faisceaux des marginaux. Les externes, au contraire, étroites et lancéolées, reçoivent des faisceaux des intermédiaires (fig. 111).

Lorsqu'elles sont peu développées, les stipelles se montrent comme de petites saillies non vascularisées; c'est le cas pour

celles insérées aux nœuds supérieurs du rachis primaire des grandes feuilles.

Les feuilles de la tige principale sont même complètement dépourvues de stipelles, comme M. Massart l'a constaté (1).

III. Stipellules.

Les stipellules sont plus rares encore que les stipelles ; on ne les trouve guère qu'aux deux premiers nœuds des rachis secondaires des feuilles les plus développées de la plante adulte. Les stipellules internes semblent exister seules. Elles sont pour le reste semblables aux stipelles (fig. 112).

D. PRÉFEUILLE.

La préfeuille, dans le *T. flavum,* est toujours une gaine dépourvue de pétiole et de limbe. Le nombre de ses faisceaux est variable : trois, cinq, sept, neuf ou quinze. Le nombre est d'autant plus grand que la tige mère à l'endroit considéré comprend elle-même un plus grand nombre de faisceaux. Les faisceaux d'une préfeuille sont toujours symétriquement disposés des deux côtés du médian. La position de la préfeuille est tantôt à droite, tantôt à gauche du plan médian de la feuille à l'aisselle de laquelle le bourgeon a pris naissance (fig. 124 et 125).

(1) *La récapitulation et l'innovation en embryologie végétale.* (Bulletin de la Société royale de botanique de Belgique, t. XXIII, 1894, p. 178.)

§ 3. LES RACINES.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

La plante adulte, comme la plante à la fin de la seconde année de végétation, ne porte que des racines adventives insérées en grand nombre aux nœuds de la portion souterraine des tiges. Ces racines, longues de 40 centimètres environ, larges de 2 à 3 millimètres, sont cylindriques, jaunâtres, garnies de radicelles et de papilles abondantes, courtes et serrées.

STRUCTURE.

Le bois primaire se compose de quelques trachées disposées en quatre pôles centripètes (B^1). Le liber primaire, reporté vers l'extérieur, se présente sous l'aspect de quatre massifs assez nettement délimités (L^1). Les fibres primitives qui forment la partie centrale du faisceau multipolaire primaire sont totalement ou partiellement sclérifiées (voyez *Fib. prim. sclér.* dans la fig. 100, pl. XII).

La zone génératrice est en partie cambiale et en partie cambiforme. Les quatre arcs cambiaux (*Cb.*) alternant avec les pôles ligneux primaires ont produit du bois secondaire (B^2) et du liber secondaire (L^2). Les quatre ponts cambiformes (*Cbf.*) situés en face des pôles ligneux primaires ont engendré, en même temps, du tissu fondamental secondaire interne fortement sclérifié et du tissu fondamental secondaire externe très abondant et parenchymateux (voyez Tf^{2i} et Tf^{2e} dans les figures 100 et 100bis). Dans certaines racines, le Tf^{2i} fait défaut [1].

[1] Les tissus que nous désignons ici par les termes Tf^{2e} et Tf^{2i} ont été diversement compris.

En 1881, M. L. Olivier, dans ses *Recherches sur l'apparcil tégumentaire des racines* (Ann. sc. nat., VI, 11, p. 119), a soutenu l'existence, dans les racines de *Thalictrum* et d'autres plantes, d'un « parenchyme tégumentaire

L'endoderme, qui constitue actuellement la surface de la racine, montre ses cellules étirées tangentiellement et recloisonnées radialement une dizaine de fois. Tout le parenchyme cortical a été décortiqué et il n'y a pas de suber.

Les racines adventives de la plante adulte, comme celles de la plante au stade V sont insérées, dans la première moitié du nœud, à droite et à gauche de chaque faisceau foliaire; elles sont unies par leurs tissus libéro-ligneux en même temps au faisceau foliaire et au faisceau réparateur le plus voisin (fig. 88, pl. IX, 94 et 98, pl. XII).

Certaines racines ne présentent que trois pôles.

secondaire *centrifuge* ». Parmi les figures qui accompagnent son travail, aucune n'est destinée à la démonstration de cette affirmation.

En 1885, M. P. Marié, dans ses *Recherches sur la structure des Renonculacées* (p. 52), a décrit, dans les racines du *T. Aquilegifolium*, un « péricycle devenu générateur et détachant des segments en dedans seulement, pour donner un parenchyme cortical secondaire à l'aspect légèrement collenchymateux ». D'après l'explication de la figure 11 donnée à la page 172, ce parenchyme cortical secondaire a pris naissance par le « cloisonnement *centrifuge* du péricycle ».

Le parenchyme tégumentaire secondaire de M. Olivier et le parenchyme cortical secondaire de M. Marié ne sont autre chose que notre Tf^{2e} et nos figures 100 et 100[bis] montrent que ce Tf^{2e} est issu du cambiforme *Cbf.* de la même manière que le liber secondaire (L') est issu du cambium (*Cb.*), c'est-à-dire en direction *centripète*.

D'autre part, M. Marié (p. 57) a signalé des « amas scléreux en dehors des lignes vasculaires primaires », comme si ces amas étaient primaires. En réalité, il s'agit d'un tissu secondaire à développement centrifuge, comme le bois secondaire : c'est notre Tf^{2i} (fig. 100[bis]).

En 1889, M. G. Bonnier (*loc. cit.*, p. 341) a décrit encore du « sclérenchyme péricyclique » dans les racines grêles du *T. tuberosum*.

M. C.-Eg. Bertrand avait cependant indiqué, dès 1880, dans sa *Théorie du Faisceau*, la véritable nature des deux tissus dont il est ici question; il avait démontré (pp. 57, 58 et fig. 50, 51) leur origine commune au dépens d'un arc de cambiforme à fonctionnement double comme un arc de cambium. (Concernant la nomenclature histologique, voyez la note au bas de la page 17 du présent mémoire.)

Les radicelles ont un faisceau à deux, trois ou quatre pôles et sont toujours réduites à leurs tissus primaires.

Les racines adventives et leurs radicelles présentent parfois, de distance en distance, des renflements de diverses grosseurs qui pourraient faire croire à un phénomène de tubérisation. Il n'en est rien cependant, car ce sont là des hypertrophies ayant pour cause la présence d'un acarien qui vit en parasite dans les racines (1).

(1) M. Lecoyer (*loc. cit.*, p. 109) indique chez les *Thalictrum foetidum* et *minus* une hypertrophie accidentelle des racines adventives qui pourrait bien avoir la même origine.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

EMBRYON (p. 7.)

Situé dans l'angle supérieur de l'akène, l'embryon du *Thalictrum flavum* est fort petit (longueur, $0^{mm},4$; largeur, $0^{mm},2$). Celui du *Ranunculus arvensis* est logé dans l'angle inférieur de l'akène et est sensiblement plus gros (longueur, $0^{mm},8$; largeur, $0^{mm},3$).

Le parenchyme cortical constitué par onze assises de cellules dans l'embryon de la Renoncule des champs, n'en compte que sept dans le Pigamon jaune (fig. 1 à 5).

PLANTULES.

Stade I (p. 10). — Au début de la germination, l'axe hypocotylé présente, dans toute son étendue, deux trachées marquant les pôles d'un faisceau bipolaire à développement centripète. Un peu plus tard, une trachée se différencie dans chaque faisceau cotylédonaire dont le bois se différenciera ultérieurement en direction centrifuge. Quelques millimètres au-dessous de l'insertion des cotylédons, on voit nettement le contact entre les trachées centripètes et les trachées centrifuges (fig. 6 à 11).

Stade II (p. 12). — La structure est la même dans les deux espèces comparées. Le diamètre total de la section au milieu de l'axe hypocotylé est un peu plus faible dans le *Thalictrum*, les faisceaux libéro-ligneux y sont un peu moins gros. Les cellules du *Thalictrum* sont notablement plus grandes, mais elles sont beaucoup moins nombreuses que celles du *Ranunculus*.

Le contact entre les faisceaux foliaires et les faisceaux réparateurs A, B, C, D d'une part, et le faisceau bipolaire de l'axe hypocotylé d'autre part, s'effectue dans les deux espèces par des trachées courtes sur une région assez étendue dans le nœud cotylédonaire (fig. 12 à 21).

Le faisceau bipolaire de la racine n'est que la continuation de celui de l'axe hypocotylé.

Stade III (p. 15). — L'axe hypocotylé, plus épais, est fortement ridé transversalement. Ces rides sont le résultat d'une déchirure longitudinale et annulaire dans le parenchyme cortical, déchirure qui a permis aux couches extérieures détachées sur toute la longueur de l'axe hypocotylé, mais fixées encore aux autres tissus par leurs deux extrémités, de s'allonger par le fait de la tension longitudinale (fig. 22 à 26).

Les cellules de l'endoderme, dont le protoplasme est vivement coloré en jaune, se sont fortement accrues puis recloisonnées radialement et transversalement un certain nombre de fois (fig. 27).

Comme dans le *Ranunculus*, les faisceaux de la tige principale débutent à ce stade, dans le nœud cotylédonaire, par six faisceaux (déjà indiqués au stade II) dont deux médians destinés aux feuilles 1 et 2 et quatre réparateurs A, B, C, D. Mais, dans l'espèce qui nous a occupé, ni le A ni le B ne se bifurque pour donner naissance à un cinquième réparateur (fig. 30 et 32).

Dans le *Thalictrum*, il a été constaté, tant parmi les plantules que parmi les plantes adultes, un nombre sensiblement égal d'individus dextres et d'individus senestres.

Ordinairement, les plantules ne sont ni plus larges, ni plus développées à la face antérieure qu'à la face postérieure, et il n'est guère possible de déterminer le cotylédon antérieur sans avoir recours à l'observation de la spire phyllotaxique.

Tandis que les cotylédons du *Ranunculus* ne présentent pas de glandes, ceux du *Thalictrum*, comme ceux de l'*Urtica dioïca* [1], montrent à leur sommet une glande à eau destinée à remédier à l'excès de tension dans l'appareil aquifère (fig. 33 et 40). Les stomates aérifères ne garnissent que la face externe (inférieure) du cotylédon. Au-dessus de la glande à eau, une douzaine de stomates aquifères béants existent sur la face interne de l'organe (fig. 41 et 42).

[1] M. A. Gravis, *loc. cit.*

Le pétiole cotylédonaire et les deux faces du limbe portent des poils glanduleux peu abondants [1]. Il n'y a pas de cristaux (fig. 39).

Les deux cotylédons reçoivent chacun deux faisceaux qui se fusionnent dès la base du cotylédon, comme c'est le cas dans le *Ranunculus;* les pôles ligneux centripètes accompagnent les faisceaux cotylédonaires dans la partie inférieure des pétioles de chaque cotylédon (fig. 37 et 38).

Les premières feuilles des plantules sont trifoliolées et présentent une gaine surmontée de deux petites proéminences latérales non vascularisées; il y a des glandes à eau, des poils glanduleux peu abondants, des stomates dépourvus de cellules annexes et un mésophylle bifacial; pas de cristaux (fig. 43 à 50).

Vers la fin de la première saison, la plantule s'enfonce graduellement en terre. Cet enfoncement, qui a pour effet de plonger dans le sol, afin de les abriter, les premiers nœuds de la tige principale, est le résultat d'un raccourcissement des portions suffisamment âgées de la racine principale, des racines adventives et des radicelles; ce raccourcissement est provoqué par une augmentation de la turgescence de ces organes (fig. 51).

Stade IV (p. 27). — Pendant la première année, la plante développe successivement des segments caulinaires et des feuilles de plus en plus amples. La tige principale comprend quatre portions caractérisées chacune par le nombre des faisceaux composant les traces foliaires : ce nombre varie de 3 à 9 (fig. 52 à 56).

Les feuilles qui précèdent la pérule, comptent neuf folioles et leur gaine est surmontée de deux petites proéminences latérales. Ces proéminences, qui peuvent recevoir l'extrémité d'un petit faisceau marginal, sont des stipules rudimentaires. Il n'y a plus de glandes à eau, ni de poils glanduleux (fig. 57 à 62).

Le sclérenchyme de la tige principale est remarquable par ses origines diverses (fig. 55 et 56).

Le parenchyme cortical de l'axe hypocotylé est tombé et la

[1] M. Lecoyer (*loc. cit.*, p. 96) indique les cotylédons comme étant glabres dans tout le genre *Thalictrum*.

surface est constituée par l'endoderme à cellules recloisonnées (fig. 53).

Stade V (p. 32). — Pendant l'hiver, les plantules perdent leurs feuilles, et leur bourgeon terminal hiverne à l'abri d'une pérule; au printemps suivant, la tige principale continue son développement.

Dans une tige principale, à la fin de la deuxième année, deux régions sont à considérer : l'une correspondant à la pousse de la première année, l'autre à la pousse de la deuxième saison terminée par une inflorescence. Cette seconde pousse comprend trois portions. Le nombre des faisceaux composant chaque trace foliaire augmente d'abord de 9 à 12, puis il va en diminuant de façon que les dernières bractées ne reçoivent qu'un seul faisceau (fig. 63 à 68).

Dans la portion qui correspond aux feuilles les plus amples, les faisceaux devenus plus nombreux commencent à se disposer sur plusieurs cercles : les foliaires, reconnaissables à leur section pointue, se rapprochent plus du centre que les autres (fig. 64). L'origine des tissus sclérifiés est encore variable.

Les racines contiennent, outre du bois et du liber secondaires issus des arcs cambiaux, du Tf^{2e} engendré par des ponts de cambiforme (fig. 69 et 70).

PLANTE ADULTE.

LES TIGES.

A la fin de la seconde saison, après avoir fleuri, la partie aérienne de la tige principale s'est détruite; la partie souterraine a hiverné et les bourgeons qu'elle portait se sont développés, au printemps suivant, les uns en tiges aériennes, les autres en tiges souterraines destinées à hiverner à leur tour.

Parcours des faisceaux (p. 38). — La tige primaire adulte comprend quatre portions caractérisées par une structure particulière. Dans chacune de ces portions, le nombre des faisceaux de la trace foliaire est toujours égal à celui des réparateurs ou groupe de réparateurs.

Ainsi, dans la portion souterraine drageonnante, sur les 20 faisceaux libéro-ligneux de la section transversale, 10 foliaires alternent avec 10 réparateurs qui fourniront les foliaires du nœud suivant (fig. 78 et 94).

Dans la portion souterraine qui se relève pour sortir de terre, sur les 59 faisceaux, 13 foliaires alternent avec 13 groupes réparateurs contenant chacun de 1 à 5 faisceaux (fig. 79 et 85).

Dans la portion aérienne inférieure, sur les 79 faisceaux, 15 foliaires alternent avec 15 groupes réparateurs de 1 à 7 faisceaux chacun (fig. 80 et 86).

Dans la portion aérienne supérieure, l'inflorescence peut contenir 60 faisceaux dont 12 foliaires alternant avec 12 groupes réparateurs de 3 à 6 faisceaux (fig. 82). Tout au sommet de l'inflorescence, il n'y a que 5 faisceaux dont un seul est foliaire; les quatre autres réparateurs représentent les faisceaux A, B, C, D des plantules (fig. 83).

L'existence de ces quatre réparateurs semble liée à la symétrie tétramère des fleurs du *Thalictrum*, comme l'existence de cinq réparateurs AA'BCD dans la Renoncule semble en rapport avec la symétrie pentamère des fleurs de cette plante.

Divers auteurs ont insisté sur les ressemblances qu'ils ont trouvées entre l'*aspect* d'une coupe faite dans la tige des *Thalictrum* adultes et celui d'une coupe ordinaire de Monocotylée. Ces ressemblances existent tant au point de vue du parcours des faisceaux qu'au point de vue de l'histologie. Le second point sera examiné plus loin; quant au premier, il faut tout d'abord faire remarquer que les ressemblances signalées se limitent à la portion souterraine qui se relève (fig. 79) et aux portions aériennes (fig. 80 et 82) de l'adulte. Elles proviennent :

1° Du grand nombre des faisceaux destinés à une même feuille;

2° De la disposition des faisceaux à des distances variables du centre de la tige;

3° Du long trajet des foliaires dans la tige, d'où résulte l'absence de véritables sympodes réparateurs.

Dans le nœud, les faisceaux foliaires pénétrant de la feuille

dans la tige s'avancent notablement vers le centre et descendent toute l'étendue d'un entre-nœud : ils sont alors situés sous les côtes et leur bois primaire forme une pointe effilée. Arrivés au nœud en dessous, ils se rapprochent de la périphérie, ne correspondent plus aux côtes et leur massif ligneux primaire s'arrondit. Après avoir descendu un deuxième entre-nœud, ils se rapprochent encore de la périphérie, descendent un troisième entre-nœud, et ainsi de suite. Leur section est alors celle d'un petit faisceau adossé à la zone externe de sclérenchyme. Il est à observer que le faisceau médian descend le plus bas et que la longueur des autres (latéraux, intermédiaires et marginaux de divers ordres) est de plus en plus réduite. Tous ces faisceaux se terminent vers le bas en se jetant sur l'un des faisceaux voisins qui est généralement un faisceau foliaire à massif ligneux arrondi.

Dans le *Thalictrum flavum* adulte, on ne retrouve donc pas les faisceaux réparateurs si nettement caractérisés du *Ranunculus arvensis*. Si, au contraire, on part de l'embryon, on constate très nettement, au bas de la tige principale du *Thalictrum*, les 4 réparateurs A, B, C, D de la Renoncule. Mais tandis que dans cette dernière plante le faisceau A ou le faisceau B se bifurque seul, dans le *Thalictrum*, les 4 faisceaux se ramifient successivement de telle façon que dans l'entre-nœud II de la tige principale, il y a déjà 8 réparateurs, savoir : A′, A″, A‴, B′, B″, C, D′, D″ (fig. 54). Plus haut, ils deviennent plus nombreux encore, mais perdent leurs caractères de réparateurs : ils se sont ramifiés et leurs branches constituent des faisceaux foliaires tels que ceux de l'adulte.

Dans les plantules du *Thalictrum*, le parcours est donc identique à celui du *Ranunculus arvensis ;* il se modifie graduellement au point d'en différer complètement. Dans les deux genres que nous comparons, les plantules semblent donc fournir plus de caractères communs que les plantes adultes.

L'étude des tiges, dans toute leur étendue et à tous les âges, est particulièrement intéressante, en ce sens qu'elle permet de rétablir l'évolution ontologique de la plante tout entière. Partant de l'embryon, nous avons constaté que les segments suc-

cessifs présentent une organisation qui va d'abord en se compliquant et ensuite en se simplifiant. Deux faits principaux résument l'évolution progressive :

1° Augmentation du nombre des faisceaux constituant la trace foliaire (3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, ...) et, concurremment, augmentation du nombre des réparateurs (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...);

2° Remplacement de chaque réparateur ramifié par un nombre de plus en plus grand de faisceaux, parmi lesquels on peut déterminer les foliaires d'un certain nombre de segments suivants.

L'évolution régressive se manifeste dans l'axe et les rameaux de l'inflorescence par une diminution du nombre des faisceaux tant foliaires que réparateurs, de telle sorte que, tout au sommet de la tige, la trace foliaire n'est plus composée que d'un seul faisceau, les réparateurs étant au nombre de quatre.

Insertion des tiges axillaires (pp. 42 et 43). — Cette insertion, dans les *Thalictrum*, présente des particularités qui, croyons-nous, n'ont encore été signalées dans aucune plante.

Les faisceaux gemmaires qui se rendent dans une tige axillaire feuillée sont en nombre double ou même triple du nombre des foliaires destinés à la feuille aisellière. Il sont insérés soit sur les foliaires soit sur les faisceaux voisins (fig. 94, 85, 86, 98, 95). Pour sortir, ils contournent le nœud en parcourant le parenchyme cortical presque horizontalement : ils forment ainsi une ceinture gemmaire complète (fig. 96) dont l'existence se trahit au dehors par un renflement en forme de croissant (fig. 75). Dans ce croissant, les faisceaux de la ceinture gemmaire, disposés en rayonnant autour d'un centre, développent d'abondants tissus libéro-ligneux secondaires (fig. 76, 77, 97).

Dans le *Ranunculus*, au contraire, les faisceaux gemmaires s'inclinent vers l'intérieur et traversent la moelle sans former de ceinture.

Histologie (p. 43). — Les tiges primaires comprennent une partie vivace souterraine et une partie fugace presque entièrement aérienne. Dans la première, le cambium intrafasciculaire est toujours bien apparent et les tissus secondaires sont assez développés; le parenchyme cortical est décortiqué par une

formation subéreuse. Dans la seconde partie, au contraire, le cambium est beaucoup moins actif et le parenchyme cortical persiste (fig. 87 et 89). Le sclérenchyme est partout abondant, mais d'origine fort variable.

On remarque d'ailleurs, dans tous les *Thalictrum*, une grande tendance à la sclérification des tissus les plus divers : la gaine sous-endodermique, les arcs externes adossés au liber, les arcs internes en avant du bois primaire, une zone ondulée périmédullaire, les éléments fibreux du bois secondaire, le Tf^{2i} remplaçant le bois secondaire de certains faisceaux, les sclérites des diaphragmes nodaux et du parenchyme cortical. Ces tissus sclérifiés sont répartis de la façon la plus inattendue dans la tige principale (fig. 55, 56, 63, 64) et dans la tige primaire (fig. 78, 79, 84, 87, 89, 90). Les racines contiennent également des ilots scléreux appartenant au faisceau primaire et au Tf^{2i} (fig. 100).

La sclérification est évidemment très utile au point de vue du soutien des organes aériens; mais dans les organes souterrains (rhizomes et racines), une sclérification si intense ne peut, semble-t-il, s'expliquer par la fonction mécanique. Ne pourrait-on supposer que la substance sclérogène soit un produit de sécrétion s'accumulant dans certaines cellules sacrifiées par l'organisme, comme les cellules cristalligènes. Ce produit de sécrétion trouverait généralement, dans les parties aériennes, son utilisation comme tissu de soutien. Mais dans le genre *Thalictrum*, il y aurait une sorte de dégénérescence scléreuse qui serait tout l'inverse de la dégénérescence charnue des Cactées [1].

Quant aux ressemblances histologiques qu'on a signalées entre les parties aériennes des *Thalictrum* et celles des Monocotylées, elles résultent : 1° de l'existence d'un sclérenchyme dans la zone circulaire sous le parenchyme cortical; 2° de l'extinction assez rapide du cambium et par suite du faible développement des

[1] A.-P. de Candolle, dans sa *Théorie élémentaire de la botanique,* a considéré comme des « dégénérescences » les modifications de forme et de texture de certains organes qui deviennent épineux, filamenteux, membraneux, scarieux ou charnus.

tissus secondaires. Le premier de ces caractères s'explique par la nécessité d'un appareil de soutien efficace, le second par la prompte destruction des parties aériennes après la fructification. Les faisceaux prennent en une fois tout le développement dont ils ont besoin. Bien d'autres Dicotylées herbacées présentent des dispositions identiques dans leurs tiges annuelles florifères.

LES FEUILLES.

La forme des feuilles varie suivant leur position sur la tige (p. 51). Le métamorphisme foliaire est progressif depuis l'insertion d'une tige primaire jusqu'à la portion aérienne inférieure : feuilles réduites à la gaine ; feuilles possédant, outre la gaine, un pétiole et un limbe rudimentaires; feuilles complètes comprenant un pétiole engainant, des stipules, des rachis et des folioles. Le métamorphisme devient régressif dans toute l'étendue de la portion aérienne supérieure : feuilles bractéiformes sans gaine ni pétiole, mais possédant des stipules, des rachis et des folioles; bractées à 5, 3 ou une seule foliole.

Le parcours des faisceaux étudié dans une des feuilles les plus complètes (p. 52) nous a renseigné sur le mode de nervation des stipules, sur le dédoublement des faisceaux vers la face interne, sur l'insertion des rachis secondaires et tertiaires (fig. 115 à 121).

Au point de vue histologique (p 53), la feuille adulte ne possède pas de glandes à eau, mais elle porte les traces de l'insertion des poils glanduleux tombés. Les stomates sont identiques à ceux de la feuille principale; le mésophylle est à peine bifacial; il n'y a pas de cristaux.

La recherche de la valeur morphologique des stipules, des stipelles et des stipellules chez les *Thalictrum* présente un réel intérêt (p. 54). A l'exception des premières feuilles de la plantule (fig. 43), des feuilles écailleuses du rhizome (fig. 101) et des feuilles pérulaires (fig. 102) chez l'adulte, la gaine des feuilles possède deux expansions vascularisées dont le dévelop-

pement est en raison inverse de celui de la gaine elle-même (fig. 103 à 107). Il résulte de nos observations :

1° Que ces expansions sont de véritables stipules : dans le cas de différenciation complète, leur nervation consiste, en effet, en faisceaux qui se détachent des faisceaux pétiolaires à une certaine distance au-dessus de la tige (fig. 104);

2° Que ces stipules sont des dépendances de la gaine à laquelle elles se substituent peu à peu. Il existe tous les intermédiaires entre la gaine seule, la gaine surmontée de deux proéminences purement cellulaires, la gaine munie d'expansions latérales vascularisées par des faisceaux venant directement de la tige et enfin la feuille à gaine remplacée par deux stipules recevant des faisceaux du pétiole élargi à sa base.

Les stipelles n'existent qu'aux trois premiers nœuds du rachis primaire des feuilles les plus amples. Elles ne sont vascularisées que quand elles sont suffisamment développées (fig. 108, 111 et 118). Quant aux stipellules, on ne les trouve guère qu'aux deux premiers nœuds des rachis secondaires des plus grandes feuilles. Elles sont peu développées et les externes semblent même manquer complètement (fig. 108 et 112).

La préfeuille (p. 59) est toujours une gaine dépourvue de pétiole et de limbe ; les faisceaux sont au nombre de 3 à 15. La position de la préfeuille est tantôt à droite, tantôt à gauche du plan médian de la feuille à l'aiselle de laquelle le bourgeon a pris naissance (fig 124 et 125).

LES RACINES.

La structure des racines (p. 60) est principalement caractérisée par la sclérose des fibres primitives au centre du faisceau ; par la production des ilots de tissu fondamental secondaire interne ordinairement sclérifié en face des pôles ligneux primaires (fig. 100 et 100bis); par le grand développement des parenchymes secondaires externes en dehors des zones cambiales et cambiformes; par le recloisonnement du péricycle ;

par la persistance de l'endoderme recloisonné radialement et occupant la surface après décortication du parenchyme cortical; par l'absence de suber. Les radicelles sont caractérisées par le développement restreint, parfois nul, des tissus secondaires, ainsi que par la persistance du parenchyme cortical.

La racine principale a un faisceau toujours bipolaire; les racines adventives un faisceau à trois ou quatre pôles; les radicelles un faisceau à deux, trois ou quatre pôles.

Les renflements des racines adventives et de leurs radicelles sont dus à un acarien parasite.

ERRATUM.

Page 42, première ligne, *au lieu de :* fig. 92, *lisez :* fig. 82.

ABRÉVIATIONS.

A. h.	Axe hypocotylé.
Ass. pil.	Assise pilifère.
B^1.	Bois primaire.
B^2.	Bois secondaire.
Bg.	Bourgeon.
Cb.	Cambium.
Cbf.	Cambiforme.
Ceint. gemm.	Ceinture gemmaire.
Cell. sclér.	Cellule scléreuse.
Col. sup.	Collet superficiel.
Cot.	Cotylédon.
End.	Endoderme.
Ép.	Épiderme.
ext.	externe.
faisc. cot.	Faisceau cotylédonaire
faisc. gemm.	Faisceau gemmaire.
Fe.	Feuille.
fib. prim.	Fibres primitives.
Gaine coll.	Gaine de collenchyme.
Gaine sclér.	Gaine de sclérenchyme
i.	Faisceau intermédiaire
int.	interne.
L.	Faisceau latéral.
L^1.	Liber primaire.
L^2.	Liber secondaire.
Lac.	Lacune.
M.	Faisceau médian.
m.	Faisceau marginal.
n.	Nœud.
Par. cort.	Parenchyme cortical.
Péric.	Péricycle.
Pét.	Pétiole.
Préfe.	Préfeuille.
$Rach^1$.	Rachis primaire.
$Rach^2$.	Rachis secondaire.
Rc.	Racine.
R. p.	Racine principale.
Scl.	Sclérenchyme.
sous Pil.	Assise sous-pilifère.
Sub.	Suber.
sus End.	Assise sus-endodermique.
t^1.	Première trachée.
t. C.	Trachée du faisceau cotylédonaire.
Tf^{2e}.	Tissu fondamental secondaire externe.
Tf^{2i}.	Tissu fondamental secondaire interne.
Tg.	Tige.
t. R.	Trachée du faisceau de la racine.
St.	Stipule.
St^{elle}.	Stipelle.
St^{ulle}.	Stipellule.

PLANCHES.

PLANCHE I.

EXPLICATION DE LA PLANCHE I.

Embryon dans la graine.

Fig. 1. — Milieu de l'axe hypocotylé (p. 7).

Fig. 2. — Région supérieure du même (p. 8).

Fig. 3. — Base des cotylédons et méristème de la tige (p. 8).

Fig. 4. — Milieu des cotylédons (p. 8).

Fig. 5. — Coupe longitudinale de l'embryon suivant le plan principal de symétrie (p. 9).

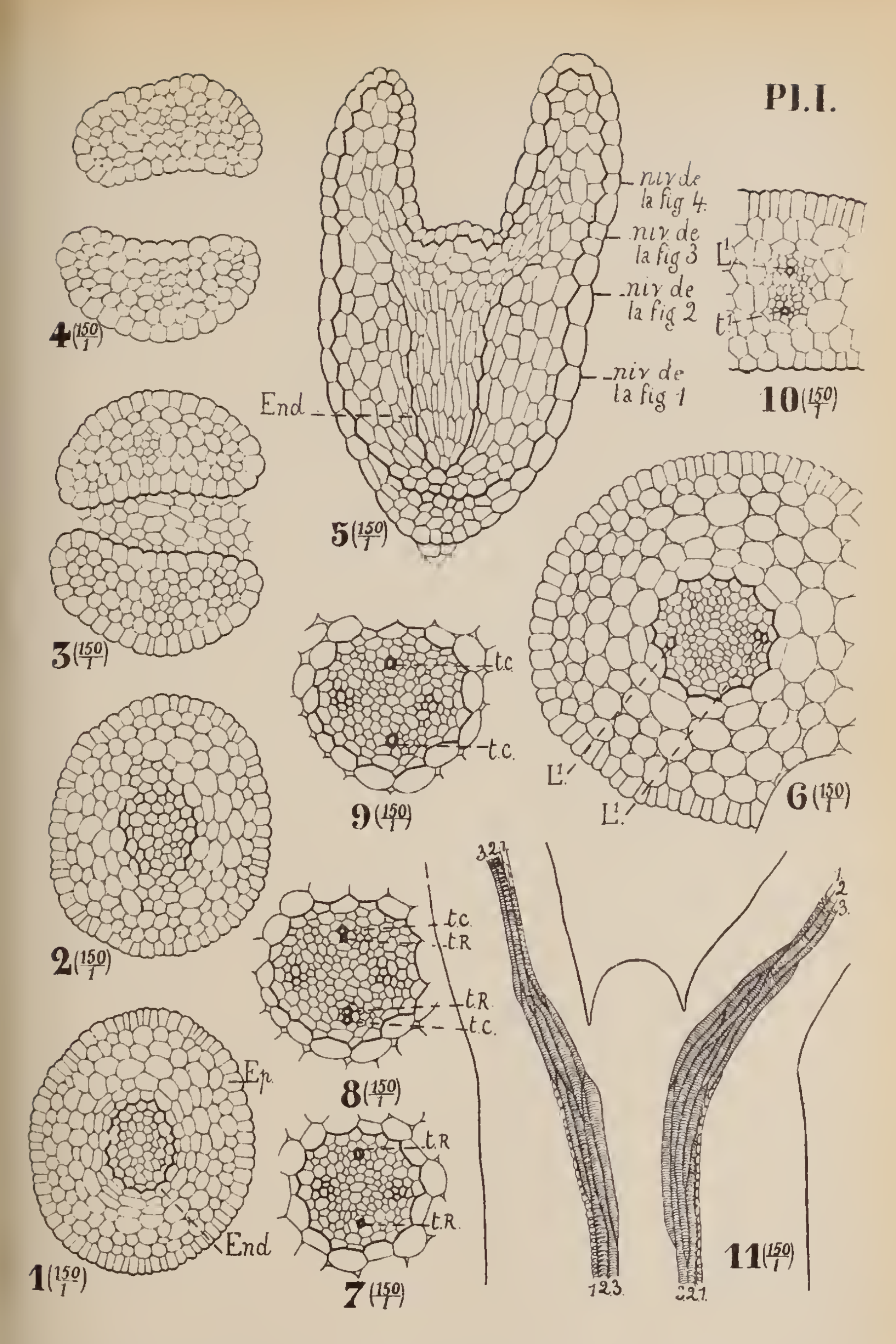
Stade I de la germination.

Fig. 6. — Milieu de l'axe hypocotylé : différenciation des pôles libériens L^1 (p. 10).

Fig. 7, 8 et 9. — Région d'insertion des cotylédons du même : contact des trachées des faisceaux cotylédonaires *t. C.* avec les trachées du faisceau de la racine *t. R.* (pp. 10 et 11).

Fig. 10. — Coupe à la base de l'un des cotylédons : faisceau unipolaire à bois centrifuge (p. 11).

Fig. 11. — Coupe longitudinale suivant le plan principal de symétrie dans une plantule un peu plus âgée : contact du bois centrifuge des cotylédons avec le bois centripète de la racine (p. 11).



THALICTRUM. Fig. 1 à 5: Embryon dans la graine.
Fig. 6 à 11: Stade I de la germination.

A. Mansion ad. nat. del.



PLANCHE II.

EXPLICATION DE LA PLANCHE II.

Stade II.

Fig. 12. — Plantule au deuxième stade de la germination (p. 12).

Fig. 13. — Milieu de l'axe hypocotylé : parenchyme cortical, épiderme et poil glanduleux (p. 12).

Fig. 14. — Endoderme vu de face (p. 12).

Fig. 15. — Milieu de l'axe hypocotylé : cylindre central (p. 12).

Fig. 16. — Coupe à la base du nœud cotylédonaire (p. 13).

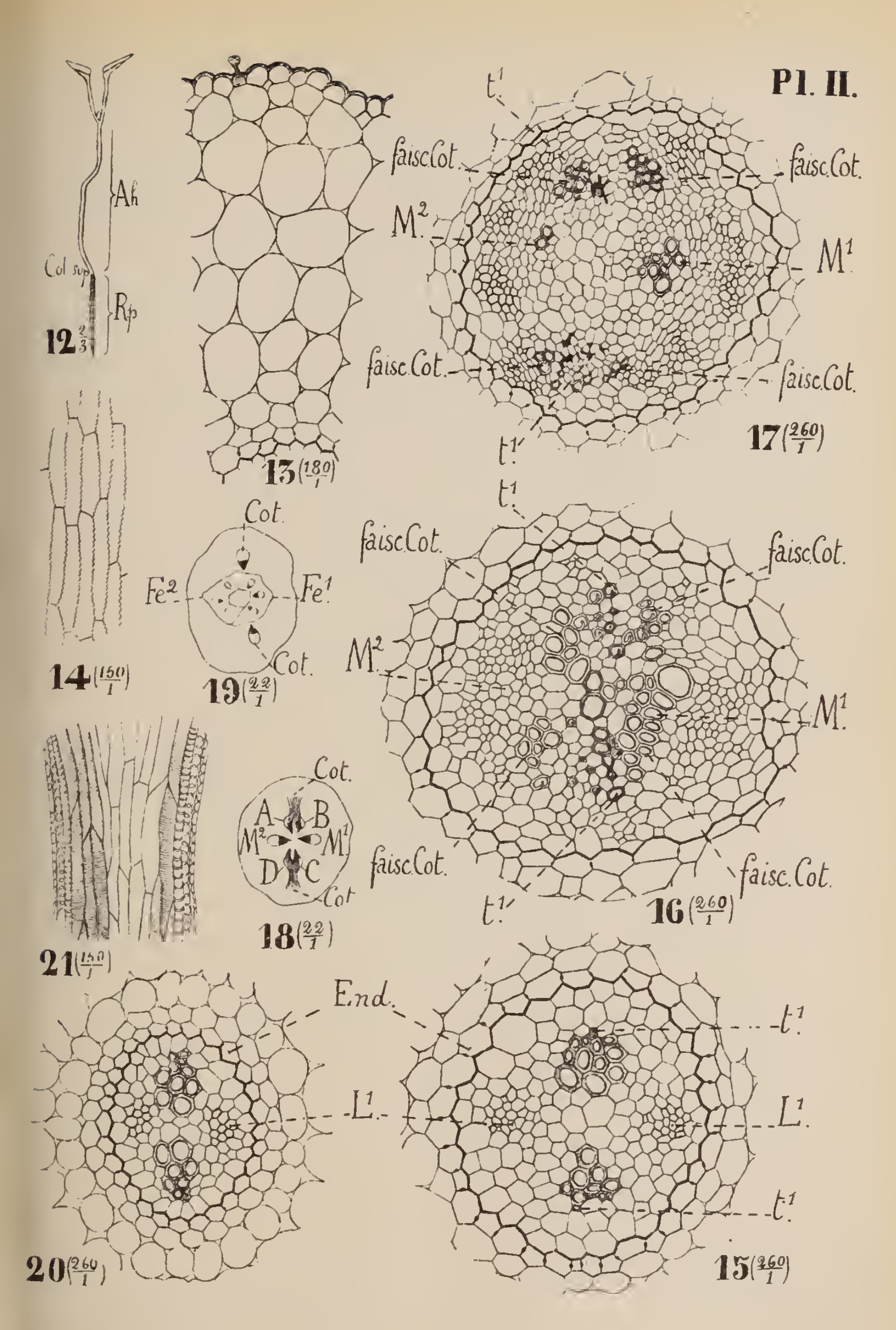
Fig. 17. — Coupe au milieu du nœud cotylédonaire (p. 13).

Fig. 18. — Ensemble au niveau de la sortie des faisceaux cotylédonaires (p. 13).

Fig. 19. — Ensemble à la base des pétioles cotylédonaires (p. 13).

Fig. 20. — Racine principale un peu au-dessous du collet superficiel (p. 14).

Fig. 21. — Coupe longitudinale vers le milieu de l'axe hypocotylé suivant le plan principal de symétrie (p. 14).



THALICTRUM. Stade II

A. Mansion ad. nat. del.



PLANCHE III.

EXPLICATION DE LA PLANCHE III.

Stade III.

Fig. 22. — Plantule au troisième stade de la germination (p. 15).

Fig. 23. — Axe hypocotylé ridé transversalement (p. 15).

Fig. 24. — Coupe transversale au milieu du même (p. 15).

Fig. 25. — Coupe longitudinale correspondante (p. 15).

Fig. 26. — Portion grossie de la coupe précédente (p. 15).

Fig. 27. — Endoderme vu de face : cellules recloisonnées (p. 16).

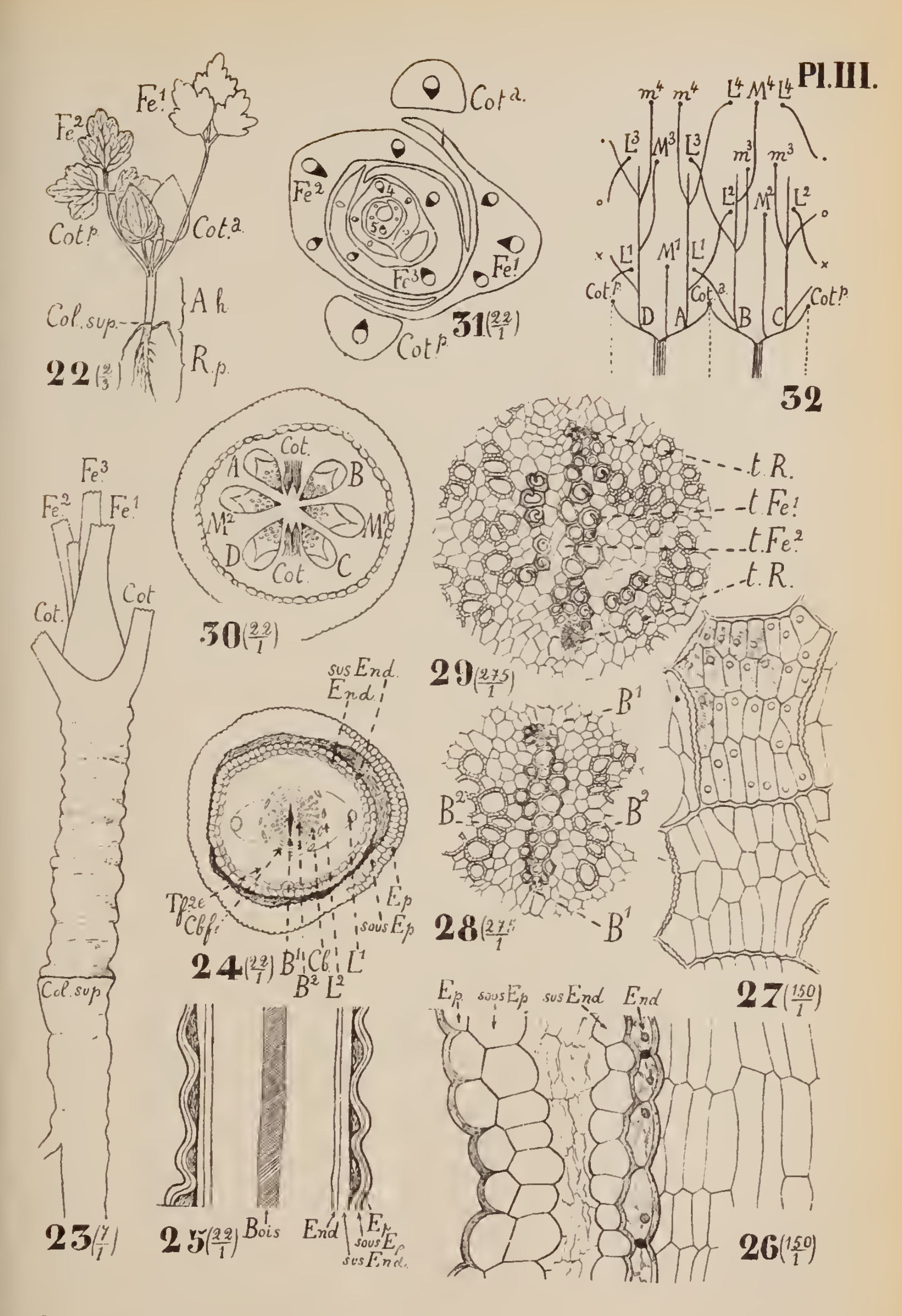
Fig. 28. — Coupe au milieu de l'axe hypocotylé (p. 16).

Fig. 29. — Coupe à la base du nœud cotylédonaire (p. 17).

Fig. 30. — Ensemble au niveau de la sortie des faisceaux cotylédonaires (p. 17).

Fig. 31. — Ensemble au niveau des pétioles cotylédonaires (p. 19).

Fig. 32. — Parcours des faisceaux dans la plantule de la figure 22 (p. 18).



THALICTRUM Stade III

A. Mansion ad. nat. del.

PLANCHE IV.

EXPLICATION DE LA PLANCHE IV.

Stade III (suite).

Fig. 33. — Cotylédon de la plantule de la figure 22 (p. 20).

Fig. 34, 35 et 36. — Schéma de la nervation des cotylédons (p. 20).

Fig. 37. — Faisceau dans la région inférieure d'un pétiole cotylédonaire : bois centripète écrasé contre le bois centrifuge (p. 20).

Fig. 38. — Faisceau vers le milieu d'un pétiole cotylédonaire : il n'y a plus de bois centripète (p. 20).

Fig. 39. — Coupe vers le milieu du limbe cotylédonaire (p. 20).

Fig. 40. — Coupe de la glande à eau (p. 21).

Fig. 41. — Stomates aquifères de l'épiderme interne (supérieur) au-dessus de la glande à eau (p. 21).

Fig. 42. — Stomates aérifères de l'épiderme externe (inférieur) du limbe cotylédonaire (p. 21).

Fig. 43. — Gaine et base du pétiole de la feuille [1] (p. 22).

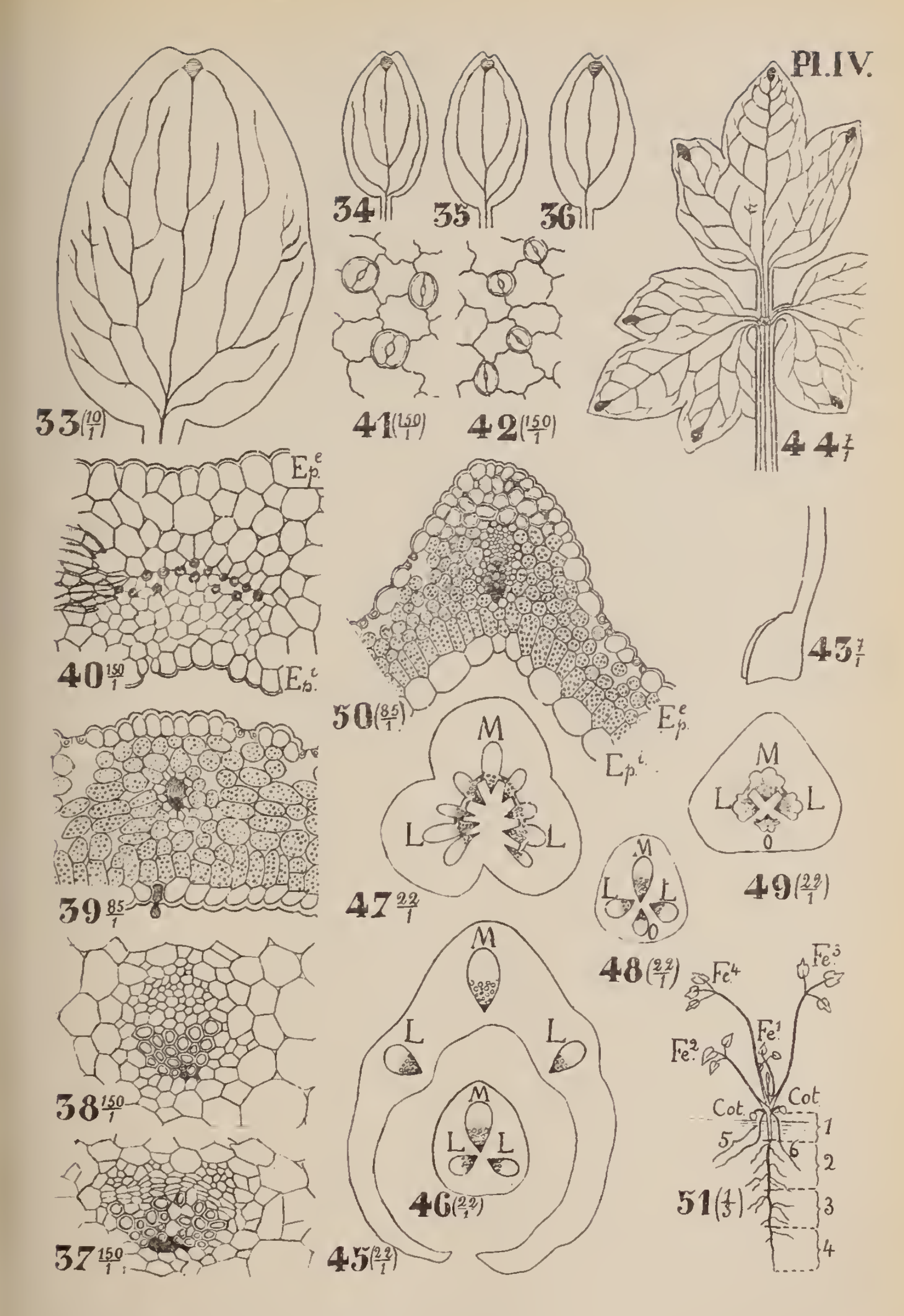
Fig. 44. — Nervation de la feuille [1] (p. 22).

Fig. 45, 46 et 47. — Coupes dans la gaine, au milieu du pétiole et au sommet du pétiole de la feuille [1] (p. 22).

Fig. 48 et 49. — Coupes au milieu et au sommet du pétiole de la feuille [1] d'une autre plantule (p. 22).

Fig. 50. — Coupe au milieu d'une foliole (p. 22).

Fig. 51. — Plantule ayant servi aux expériences de plasmolyse (p. 23).



THALICTRUM. Stade III (suite).

A. Mansion ad. nat. del.

PLANCHE V.

EXPLICATION DE LA PLANCHE V.

Stade IV.

Fig. 52. — Plantule au quatrième stade (fin de la première année) (p. 27).

Fig. 53. — Portion d'une coupe transversale de l'axe hypocotylé après décortication : endoderme recloisonné radialement (p. 27).

Fig. 54. — Parcours de faisceaux dans la tige de la plantule de la figure 52 (p. 28).

Fig. 55. — Coupe de l'entre-nœud ^{6} de la tige principale (p. 29).

Fig. 56. — Coupe de l'entre-nœud ^{10} de la même (p. 30).

Fig. 57. — Feuille ^{9} (p. 30).

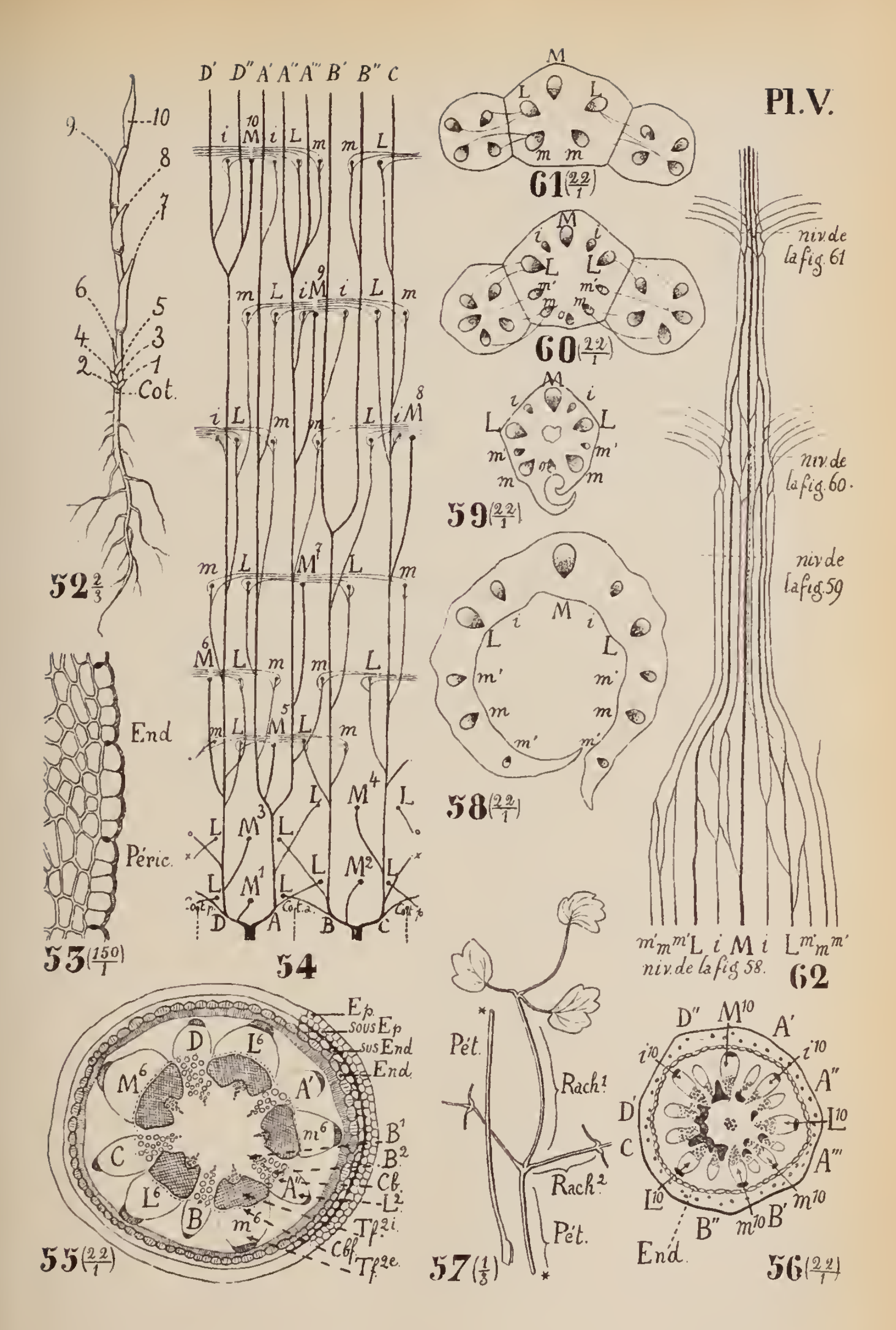
Fig. 58 et 59. — Coupes dans la gaine et dans le pétiole de la feuille précédente (p. 30).

Fig. 60. — Coupe au niveau de l'insertion de la première paire de rachis secondaires (p. 31).

Fig. 61. — Idem au niveau de la deuxième paire (p. 31).

Fig. 62. — Parcours des faisceaux dans la gaine, le pétiole et le rachis primaire de la feuille ^{9} (p. 31).

Pl. V.



THALICTRUM. Stade IV

A. Mansion ad. nat. del.

PLANCHE VI.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VI.

Stade V. (Plante vers la fin de la deuxième année.)

Fig. 63. — Ensemble de la coupe dans la première portion de la deuxième région de la tige principale (p. 34).

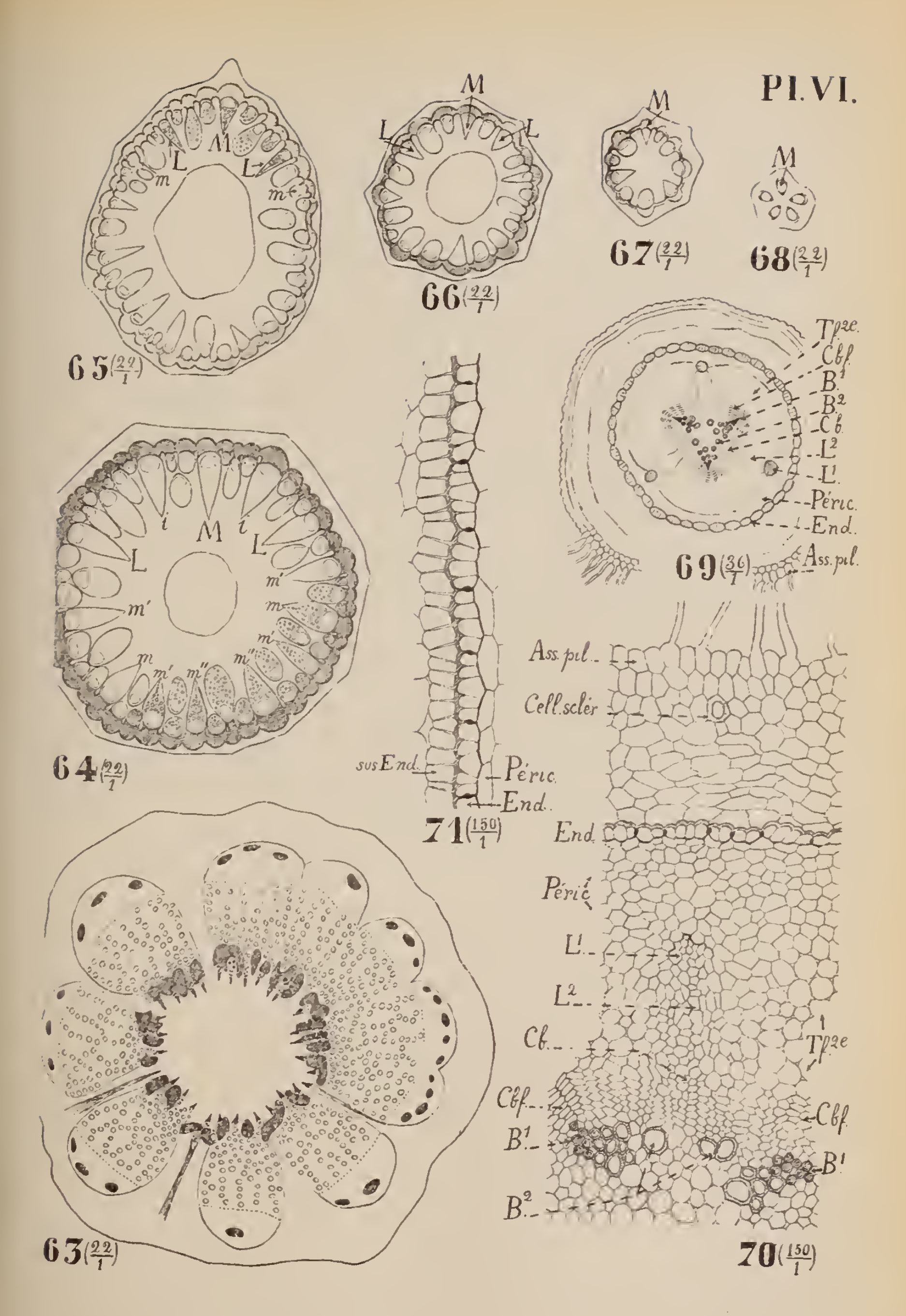
Fig. 64. — Idem dans la deuxième portion de la même (p. 34).

Fig. 65, 66, 67 et 68. — Idem dans la troisième portion, vers le bas, vers le milieu, vers le sommet et tout à l'extrémité de l'inflorescence (p. 35).

Fig. 69. — Racine adventive à trois pôles (p. 35).

Fig. 70. — Une portion de la coupe précédente grossie davantage (p. 36).

Fig. 71. — Coupe longitudinale radiale de l'endoderme recloisonné d'une racine (p. 36).



THALICTRUM. Stade V

A. Mansion ad. nat. del.



PLANCHE VII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VII.

Plante adulte.

Fig. 72. — Tige primaire au printemps : elle comprend une portion souterraine drageonnante, une portion souterraine qui se relève et une portion aérienne florifère dont on n'a figuré que la base (p. 37).

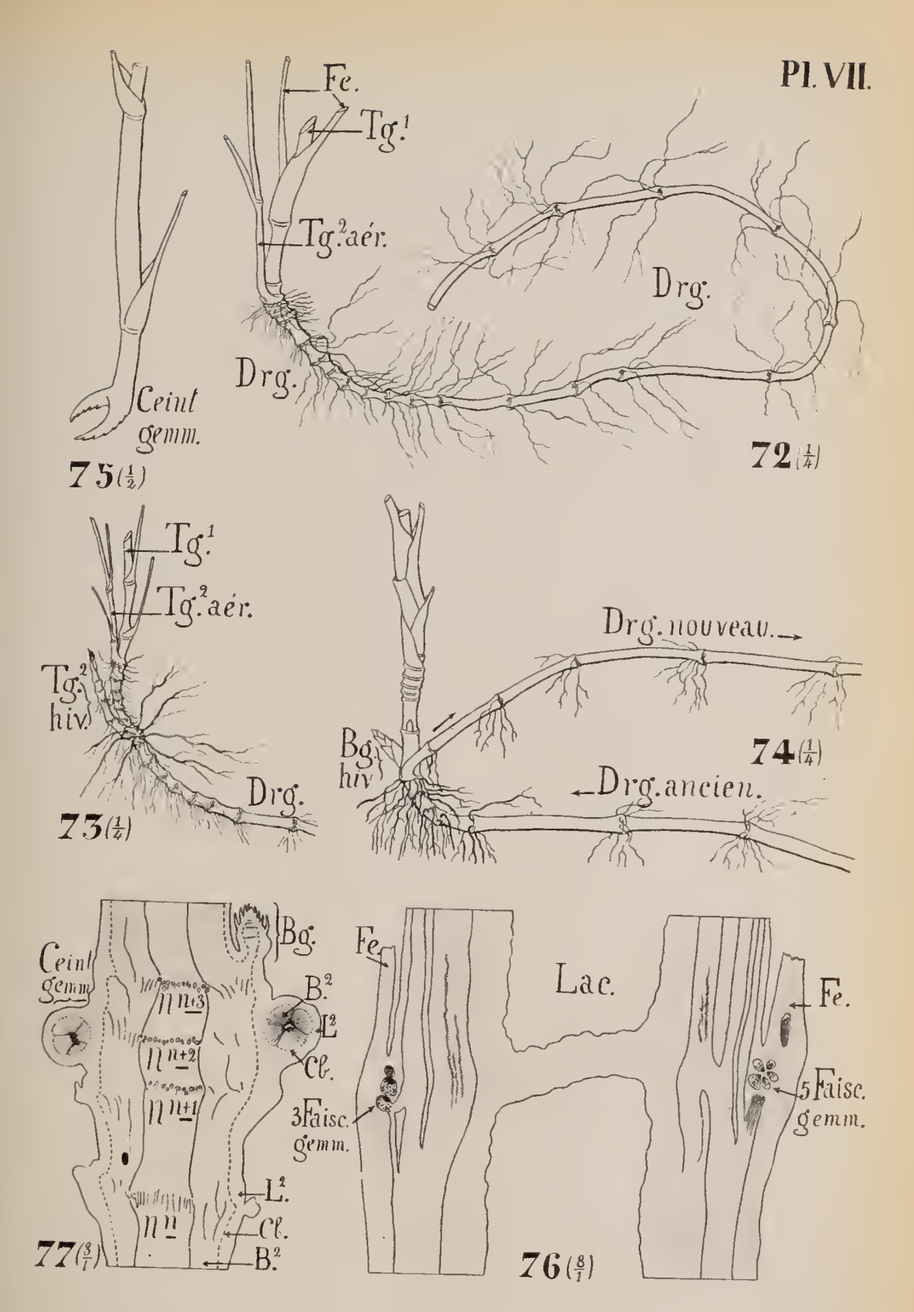
Fig. 73. — Une tige secondaire aérienne et une tige secondaire hivernante insérées sur la portion souterraine qui se relève d'une tige primaire (p. 38).

Fig. 74. — Tige primaire en automne : elle porte un gros bourgeon hivernant et un drageon nouveau insérés sur la portion souterraine qui se relève (p. 38).

Fig. 75. — Base d'une forte tige secondaire arrachée et montrant la ceinture gemmaire (p. 50).

Fig. 76. — Coupe longitudinale d'un nœud souterrain montrant l'insertion d'une feuille et les faisceaux de la ceinture gemmaire (p. 50).

Fig. 77. — Coupe longitudinale de quatre segments souterrains : au nœud $^{n+2}$, les faisceaux de la ceinture gemmaire très développée contiennent beaucoup de bois secondaire (p. 50).



THALICTRUM. plante adulte.

Caractères extérieurs et ceinture gemmaire.

A. Mansion ad. nat. del.



PLANCHE VIII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VIII.

Tige primaire de la plante adulte.

Fig. 78. — Portion souterraine drageonnante (entre-nœud ^{3}) : 20 faisceaux (p. 38).

Fig. 79. — Portion souterraine qui se relève (entre-nœud ^{18}) : 59 faisceaux (p. 39).

Fig. 80. — Portion aérienne inférieure (entre-nœud ^{24}) : 79 faisceaux (p. 40).

Fig. 81. — Un peu au-dessus du nœud ^{24} : tige, bourgeon axillaire et gaine de la feuille (p. 41).

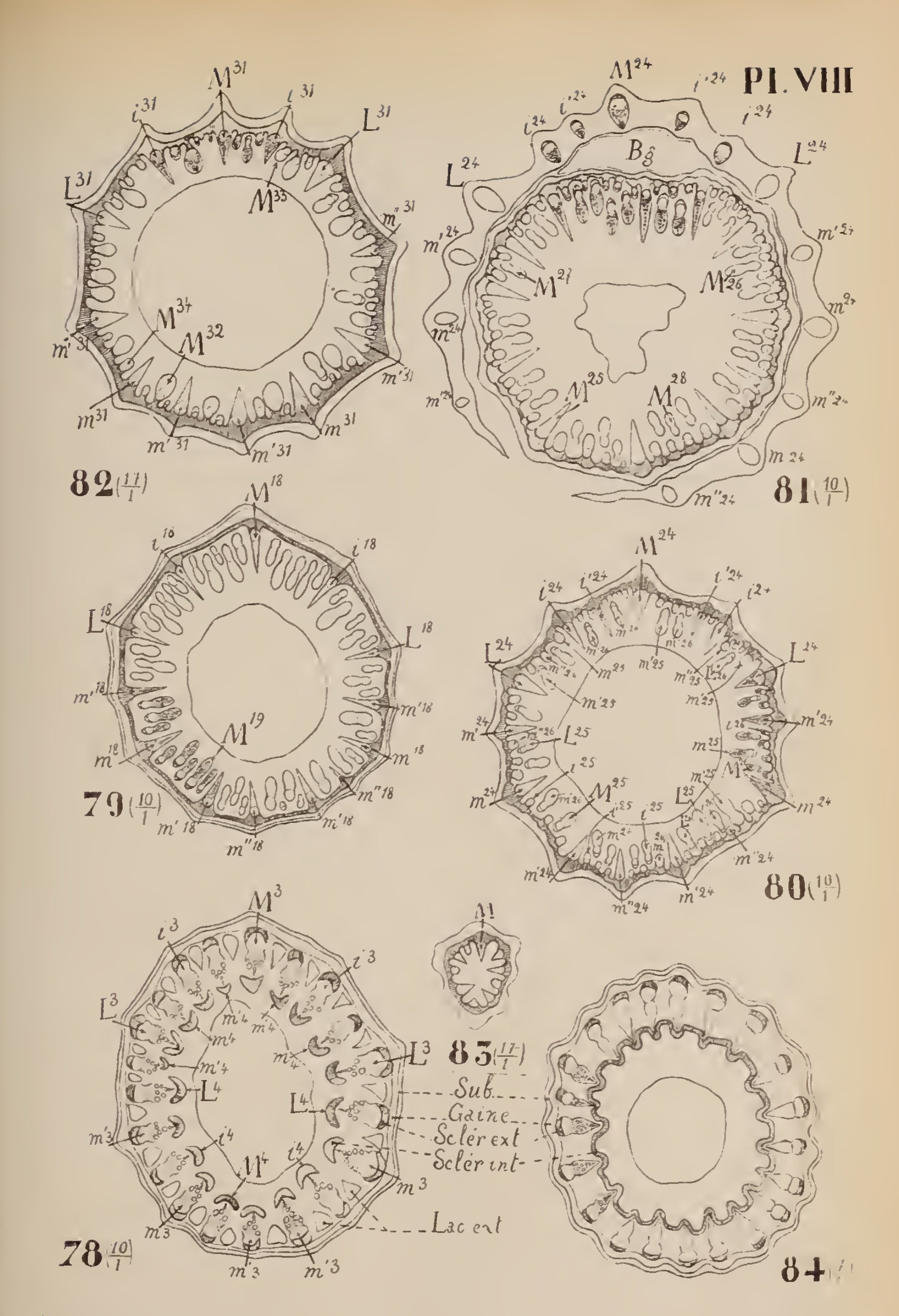
Fig. 82. — Portion aérienne supérieure (entre-nœud ^{31}) : 60 faisceaux (p. 42 : le texte renseigne par erreur la figure 92 au lieu de la figure 82).

Fig. 83. — Vers le haut de l'inflorescence (entre-nœud ^{40}) : 10 faisceaux (p. 42).

Fig. 84. — Grosse tige souterraine drageonnante à comparer à la figure 78 (p. 44).

N. B. — Partout le sclérenchyme est indiqué par des hachures.

Pl. VIII



THALICTRUM. Plante adulte.

Structure de la tige primaire

A. Mansion ad. nat. del.

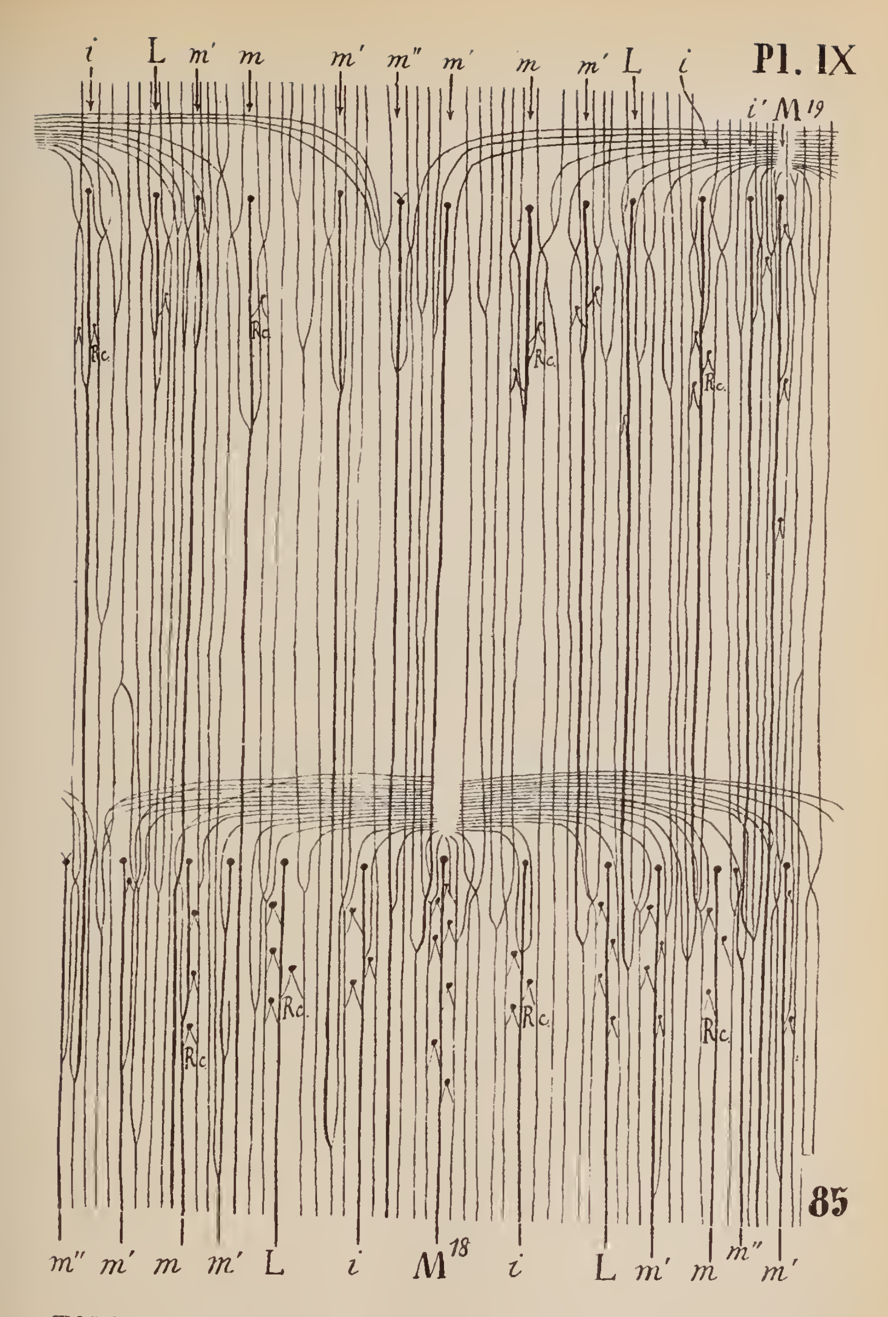


PLANCHE IX.

EXPLICATION DE LA PLANCHE IX.

Tige primaire de la plante adulte.

Fig. 85. — Parcours des faisceaux dans deux segments de la portion souterrain qui se relève : le segment inférieur (n° 18) correspond à la coupe représentée par la figure 79 de la planche précédente. On remarquera l'insertion des racines adventives (*Rc.*) et les faisceaux transversaux de la ceinture gemmaire (p. 40).



THALICTRUM. Plante Adulte.

Parcours des faisceaux dans la tige primaire.

A. Mansion ad. nat. del.

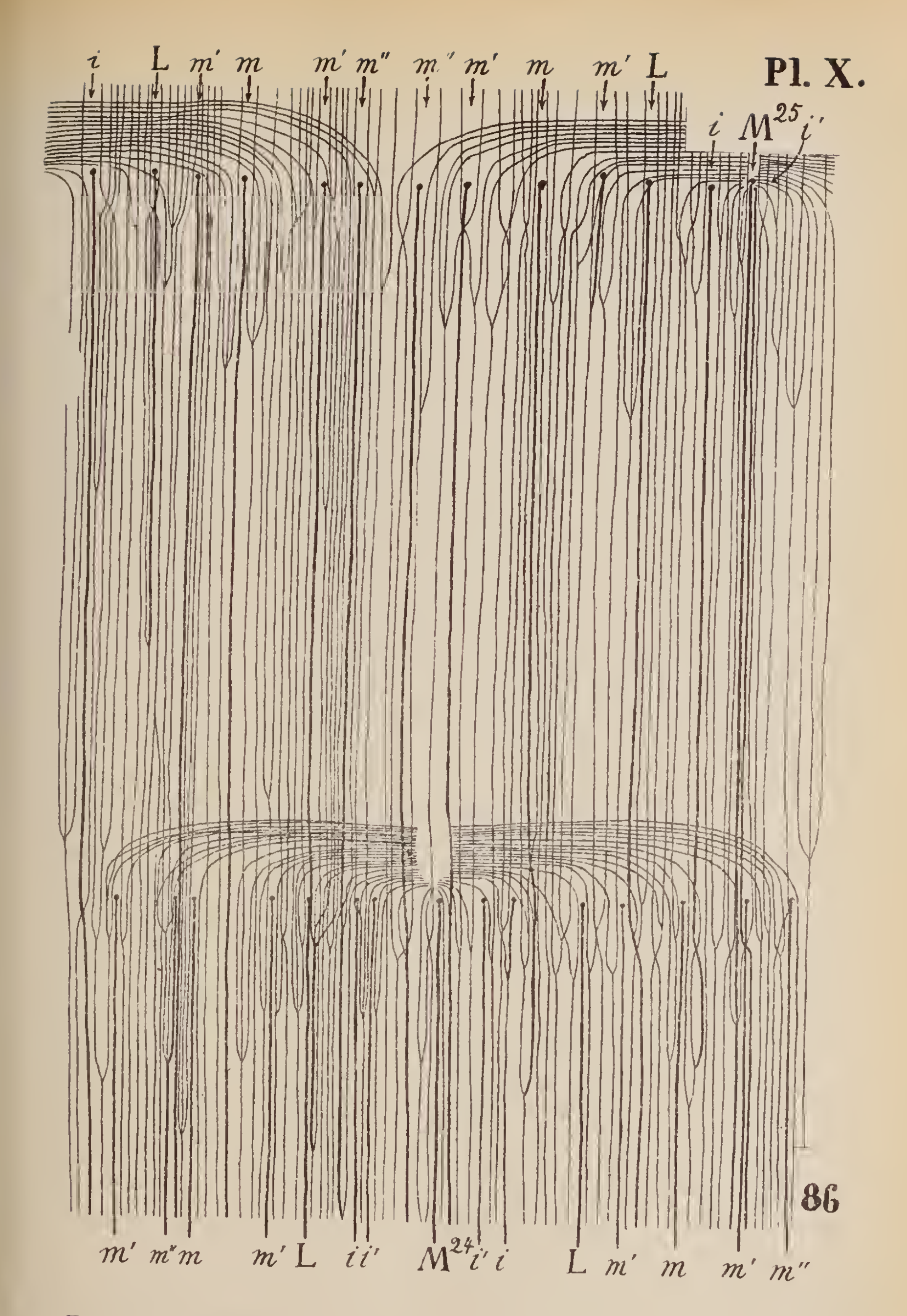
PLANCHE X.

EXPLICATION DE LA PLANCHE X.

Tige primaire de la plante adulte.

Fig. 86. — Parcours des faisceaux dans deux segments de la portion aérienne inférieure : le segment inférieur (n° 24) correspond à la coupe représentée par la figure 80 de la planche VIII. Les faisceaux transversaux appartiennent à la ceinture gemmaire (p. 41).

Pl. X.



THALICTRUM. Plante Adulte.

Parcours des faisceaux dans la tige primaire.

A. Mansion ad. nat. del.



PLANCHE XI.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XI.

Tige primaire de la plante adulte.

Fig. 87. — Coupe dans la portion souterraine drageonnante (pp. 43 et 44).

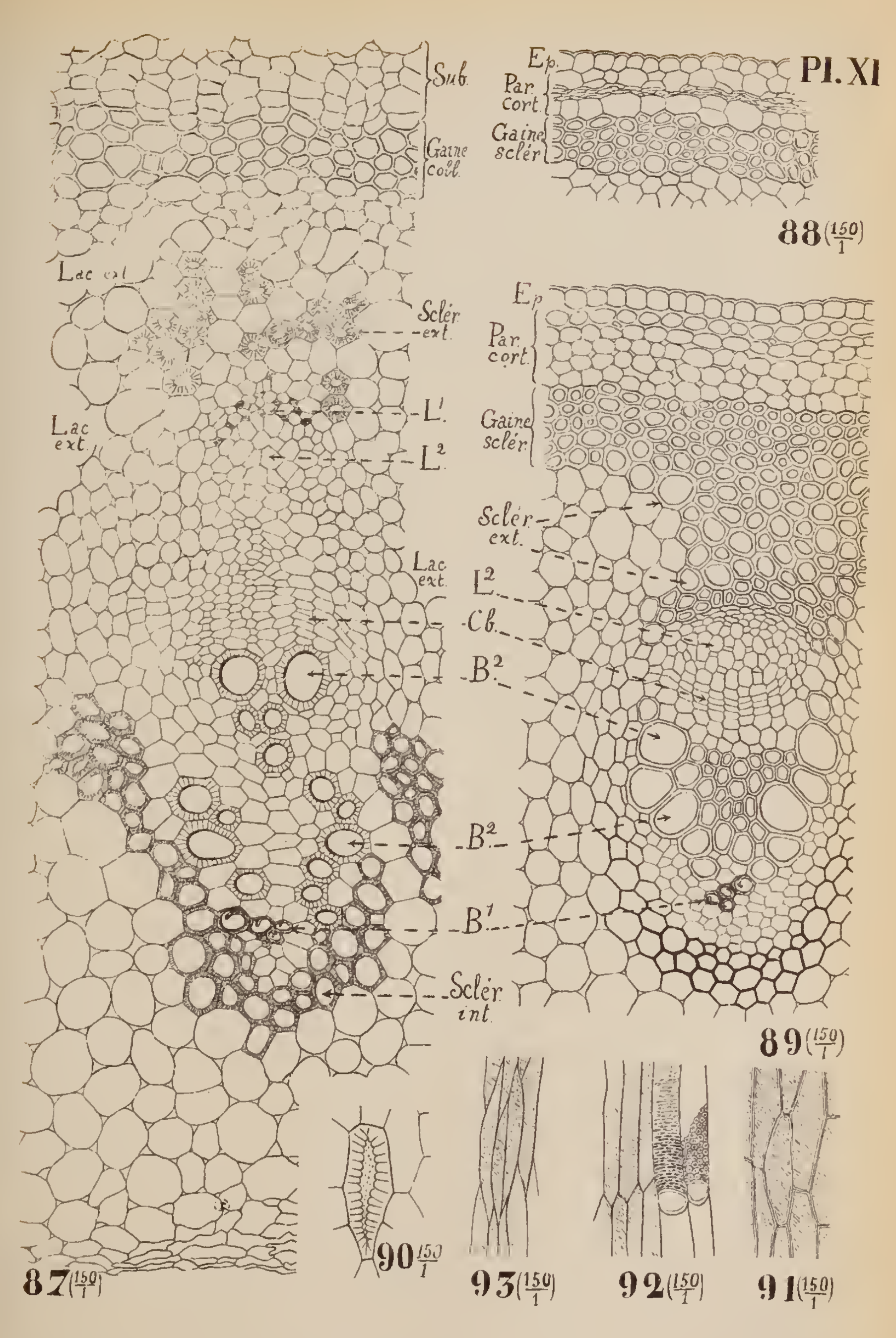
Fig. 88. — Coupe dans la portion souterraine qui se relève : les tissus périphériques sont seuls représentés (p. 45).

Fig. 89. — Coupe dans la portion aérienne inférieure : le parenchyme médullaire n'a pas été représenté (p. 45).

Fig. 90. — Une cellule scléreuse du diaphragme nodal dans la portion souterraine qui se relève (p. 45).

Fig. 91, 92 et 93. — Coupes longitudinales dans la portion souterraine drageonnante : la première représente le sclérenchyme externe; la deuxième, le bois secondaire; la troisième, le sclérenchyme interne (pp. 44 et 45).

Pl. XI



88 (150/1)

89 (150/1)

87 (150/1) 90 (150/1) 93 (150/1) 92 (150/1) 91 (150/1)

THALICTRUM. Plante Adulte.

Histologie de la tige primaire.

A. Mansion ad. nat. del.

PLANCHE XII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XII.

Plante adulte.

Fig. 94. — Parcours des faisceaux dans deux segments de la portion souterraine drageonnante : le segment inférieur (n° 3) correspond à la coupe représentée par la figure 78, planche VIII. Insertion des racines adventives (*Rc.*) et ceinture gemmaire (pp. 39 et 42).

Fig. 95. — Coupe mince dans un nœud souterrain : les faisceaux gemmaires se détachent des faisceaux foliaires sortants (p. 43).

Fig. 96. — Coupe très épaisse dans un nœud souterrain : la ceinture gemmaire est complète (p. 43).

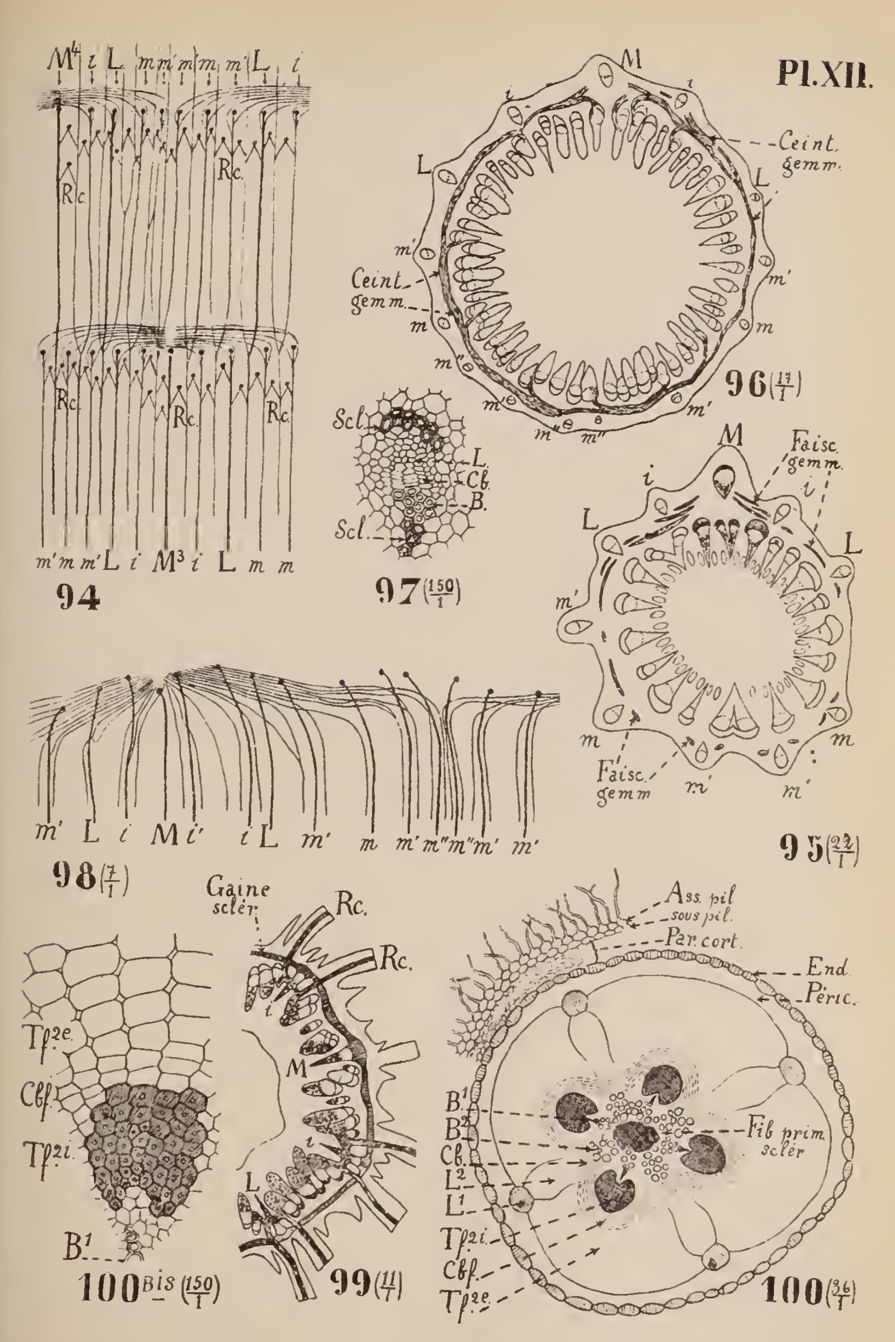
Fig. 97. — Coupe transversale d'un faisceau gemmaire provenant de la coupe représentée par la figure 76, planche VII (p. 50).

Fig. 98. — Faisceaux foliaires et faisceaux gemmaires d'un nœud fendu et étalé (p. 43).

Fig. 99. — Fragment d'une coupe dans la portion souterraine drageonnante : insertion des racines adventives *Rc.* (p. 39).

Fig. 100. — Ensemble d'une racine adventive à quatre pôles (p. 60).

Fig. 100bis. — Une partie de la coupe précédente grossie davantage (p. 60).



THALICTRUM Plante adulte.

Parcours des faisceaux, ceinture gemmaire et racines adventives.

A. Mansion ad. nat. del.

PLANCHE XIII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XIII.

Feuilles de la plante adulte.

Fig. 101. — Feuille écailleuse de la portion souterraine drageonnante : elle est réduite à la gaine (pp. 51, 56).

Fig. 102. — Feuille pérulaire : outre la gaine, elle possède un pétiole et un limbe rudimentaires (pp. 51, 56).

Fig. 103, 104 et 105. — Bases de trois feuilles complètes de la portion aérienne inférieure : dans la première, les stipules sont vascularisées par deux faisceaux venant directement de la tige; dans les deux autres, les faisceaux des stipules se détachent des faisceaux pétiolaires (pp. 51, 56, 57).

Fig. 106. — Base d'une feuille de la portion aérienne supérieure (p. 57).

Fig. 107. — Base d'une feuille bractéiforme (p. 57).

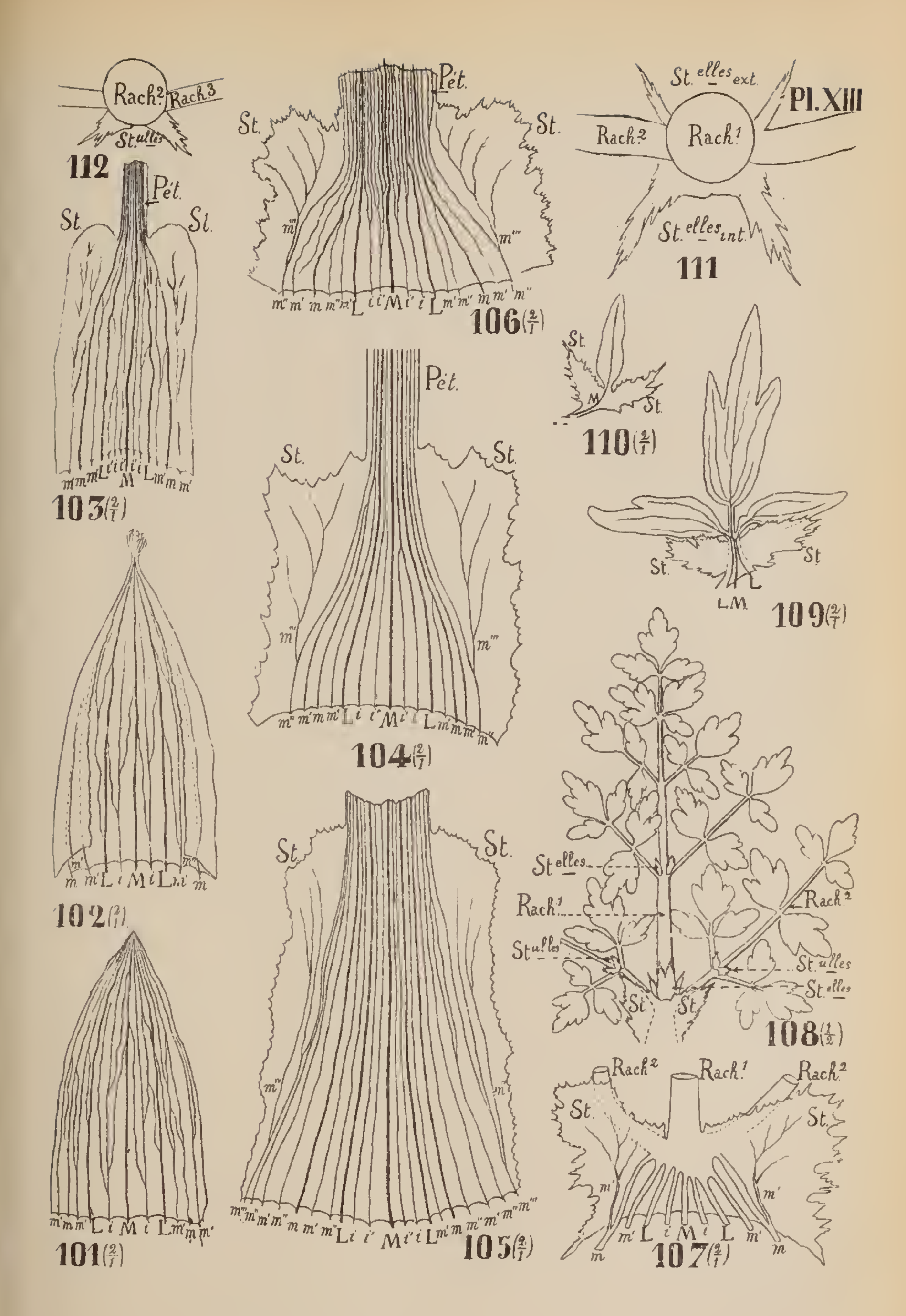
Fig. 108. — Feuille bractéiforme montrant la position des stipelles et des stipellules (p. 51).

Fig. 109. — Bractée à trois folioles (pp. 51, 57).

Fig. 110. — Bractée à une foliole (pp. 51, 57).

Fig. 111. — Schéma de la position des stipelles (p. 58).

Fig. 112. — Schéma de la position des stipellules (p. 59).



THALICTRUM. Plante adulte.

Feuilles

A. Mansion ad. nat. del.

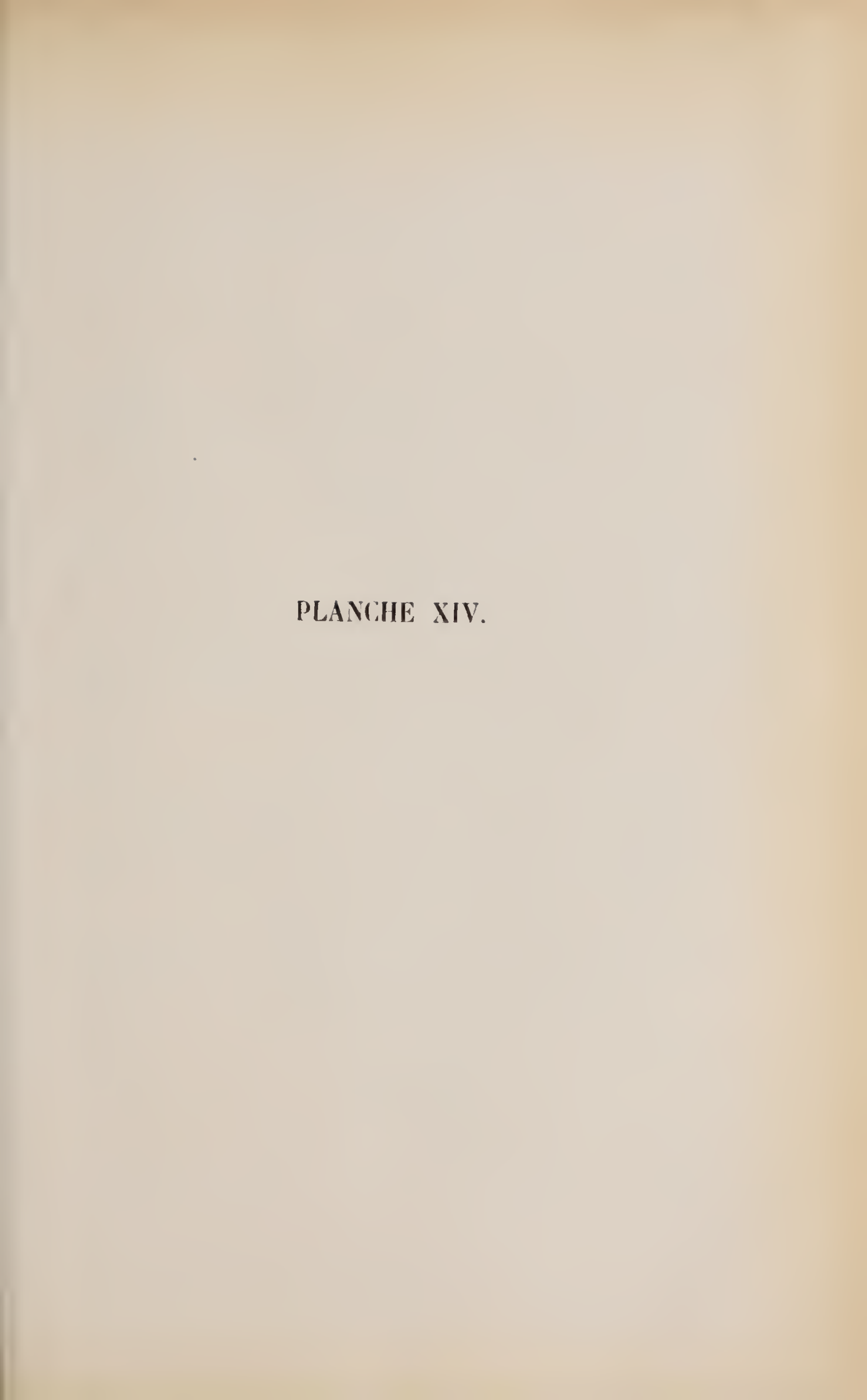


PLANCHE XIV.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XIV.

Feuilles de la plante adulte.

Fig. 113 à 121. — Coupes pratiquées à divers niveaux dans une feuille de la portion aérienne inférieure comme celle de la figure 104.

Fig. 113. — A la base de la gaine (p. 52).

Fig. 114. — Vers le milieu de la gaine (p. 52).

Fig. 115. — Au sommet de la gaine (p. 52).

Fig. 116. — A la base du pétiole (p. 52).

Fig. 117. — Dans le premier entre-nœud du rachis primaire (p. 53).

Fig. 118. — Schéma de l'insertion des rachis secondaires (p. 53).

Fig. 119 et 120. — Deux des coupes au niveau de l'insertion des rachis secondaires (p. 53).

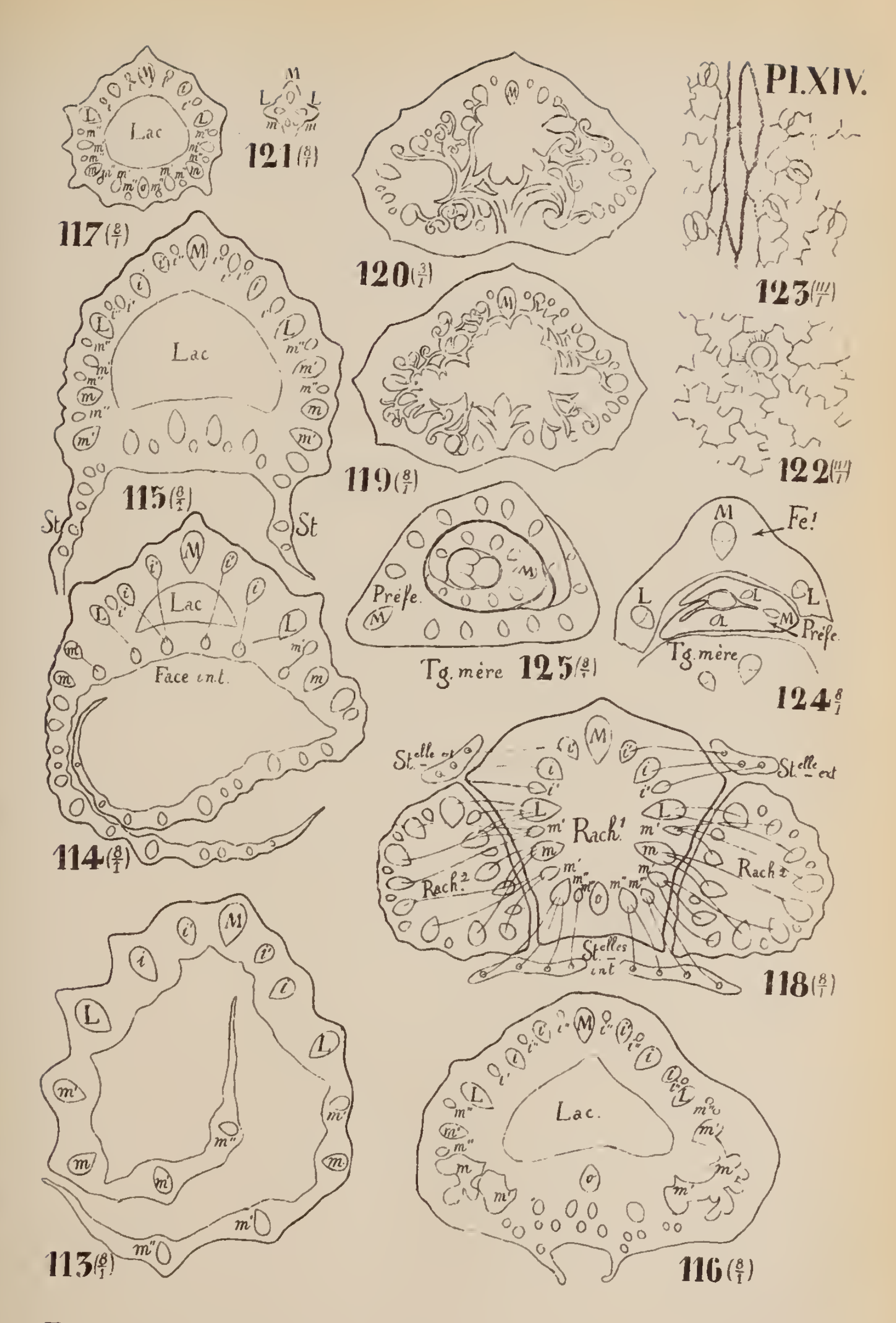
Fig. 121. — Coupe dans un pétiolule (p. 53).

Fig. 122. — Épiderme interne (supérieur) d'une foliole (p. 54).

Fig. 123. — Épiderme externe (inférieur) de la même (p. 54).

Fig. 124. — Fragment d'une coupe pratiquée au premier nœud d'une plantule au stade III : à l'aisselle de la feuille [1] une préfeuille droite à trois faisceaux (p. 59).

Fig. 125. — Idem à l'un des nœuds de la portion aérienne inférieure de la plante adulte : préfeuille gauche à quinze faisceaux (p. 59).



THALICTRUM. Plante adulte.

Feuilles (suite).

A. Mansion ad. nat. del.

TABLE DES MATIÈRES.

CONTRIBUTION

À

L'ANATOMIE DES RENONCULACÉES

TRIBU DES CLÉMATIDÉES

PAR

R. STERCKX

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES
PROFESSEUR A L'ÉCOLE NORMALE DE L'ÉTAT A MONS

INTRODUCTION

Ce travail a pour objet l'étude anatomique de la tribu des Clématidées. J'ai choisi comme type le *Clematis vitalba* L.

Dans les monographies anatomiques des Renonculacées publiées en 1884 par M. Albert Meyer et en 1885 par M. Paul Marié, il n'est question que de la structure des organes végétatifs à l'état adulte. Mon étude du *Clematis vitalba* est plus étendue : elle porte sur l'embryon, le développement de l'appareil végétatif considéré à cinq stades et la plante adulte dans son ensemble. C'est en étudiant l'anatomie des plantes aux diverses périodes de leur évolution qu'on acquerra des notions justes et précises, pouvant servir à leur classification.

Après avoir fait un exposé analytique de la structure du *Clematis vitalba,* j'ai, dans une seconde partie, résumé succinctement les principales particularités offertes par diverses espèces de Clématites ainsi que par l'*Atragene alpina.*

Ce travail a été exécuté au laboratoire de l'Institut botanique de l'Université de Liége. Je prie M. le professeur A. Gravis d'agréer mes humbles remercîments, en même temps que l'hommage de mon profond respect.

CONTRIBUTION

À

L'ANATOMIE DES RENONCULACÉES

TRIBU DES CLÉMATIDÉES

PREMIÈRE PARTIE

CLEMATIS VITALBA L.

CHAPITRE PREMIER.

L'EMBRYON DANS LA GRAINE.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Le fruit du *Clematis vitalba* L. est un akène un peu comprimé latéralement. Il est terminé par un style persistant, très long et poilu. Dans l'angle supérieur de l'akène, au milieu d'un albumen abondant et dur, se trouve un embryon très petit ($0^{mm},7$ de longueur sur $0^{mm},5$ de largeur), droit ; les cotylédons ont leur surface parallèle aux faces latérales de l'akène.

STRUCTURE.

Coupes transversales.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé* (pl. XV, fig. 1) :

1° L'*épiderme;*

2° Le *parenchyme cortical,* constitué par six ou sept assises cellulaires dont les plus intérieures forment des séries radiales se terminant à l'endoderme;

3° Le *cylindre central,* limité par un péricycle dont les éléments alternent nettement avec ceux de l'endoderme. Le reste est constitué par du procambium. Le diamètre du cylindre, qui comprend onze cellules environ, est le tiers du diamètre total de la coupe.

B. *Région d'insertion des cotylédons.* — A la base du nœud cotylédonaire, on retrouve la même structure, sauf que le parenchyme cortical est moins épais et le cylindre central plus large.

Un peu plus haut, le procambium se localise en deux cordons, l'un antérieur et l'autre postérieur : ce sont les faisceaux cotylédonaires séparés par des cellules plus grandes appartenant au méristème primitif, générateur de la tige principale (fig. 2).

Une coupe à la base du cotylédon montre le faisceau cotylédonaire procambial, le parenchyme et l'épiderme. Plus haut, le faisceau cotylédonaire se trifurque.

C. *Région inférieure de l'axe hypocotylé.* — Dans sa région inférieure, l'axe hypocotylé montre une structure analogue à celle de la région A. On remarque cependant que :

1° L'*épiderme* est remplacé par deux couches de cellules disposées radialement. Ces cellules, moins régulières que celles de l'épiderme, n'ont pas de cuticule ; elles appartiennent à la coiffe ;

2° Le *parenchyme cortical* est formé d'un plus petit nombre d'éléments ;

3° Le *cylindre central* est moins large.

Coupe longitudinale.

La figure 3 représente la section longitudinale de l'embryon suivant son plan principal de symétrie, c'est-à-dire perpendiculairement à la surface des cotylédons. On y retrouve la même structure que dans le *Ranunculus arvensis*, le *Delphinium Ajacis* et le *Thalictrum flavum* [1].

[1] Voyez *Contribution à l'anatomie des Renonculacées : Le Ranunculus arvensis* L., par M. Éd. Nihoul. (Mémoires in-4° de l'Académie royale des sciences, etc., de Belgique, t. LII, 1891.) — *Le genre Delphinium*, par M. C. Lenfant. (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 2e série, t. XIX, 1896.) — *Le Thalictrum flavum* L., par M. A. Mansion. (Ibidem, t. XX, 1897.)

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DE L'APPAREIL VÉGÉTATIF.

STADE I.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Début de la germination ; la moitié inférieure de l'axe hypocotylé se montre au dehors.

STRUCTURE.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé.* — Diffère à peine du niveau correspondant dans l'embryon. Les cellules du parenchyme cortical se sont agrandies ; dans le cylindre central, des éléments différenciés indiquent les pôles libériens aux deux extrémités du diamètre perpendiculaire au plan de symétrie.

B. *Région d'insertion des cotylédons.* — A la base du nœud cotylédonaire, il y a, outre les deux pôles libériens comme ci-dessus, deux pôles ligneux, l'un antérieur, l'autre postérieur (fig. 4). Chacun de ces pôles est occupé par une trachée. Si l'on examine ensuite les coupes successives en se rapprochant du sommet, on voit sur une de ces coupes (fig. 5), au pôle antérieur, que la trachée initiale du faisceau cotylédonaire (*t.* C.) est en contact avec la trachée initiale du faisceau de l'axe hypocotylé *t.* R. ; un peu plus haut, cette dernière disparaît. Au pôle postérieur, il y a un contact semblable.

A un niveau un peu inférieur à celui où se détachent les deux cotylédons (fig. 6), on trouve deux faisceaux cotylédonaires unipolaires séparés par le méristème primitif de la tige principale. Plus haut, ces faisceaux se trifurquant, on trouve vers le milieu des cotylédons trois faisceaux, dont deux au stade procambial, tandis que le médian est en voie de différenciation (pl. XVI, fig. 7).

STADE II.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Les cotylédons, dégagés du péricarpe, sont étalés et verdis (fig. 8). Bien qu'il n'y ait aucune trace de feuille visible à l'œil nu, il existe cependant déjà deux petites feuilles cachées par les pétioles cotylédonaires.

L'axe hypocotylé, reconnaissable à sa surface lisse (formée par l'épiderme), est long de 11 à 12 millimètres et épais de $0^{mm},5$ en son milieu. Son sommet présente une courbure résultant de la nutation dans un plan.

La racine principale, — dont la surface, constituée par l'assise pilifère, est terne, — est deux fois moins longue que l'axe hypocotylé. Il n'existe pas encore de radicelles.

STRUCTURE.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé* (fig. 9) :

1° *Épiderme* avec cuticule assez épaisse ;

2° *Parenchyme cortical* méatique ; endoderme peu différencié ;

3° *Cylindre central.* Péricycle formé d'une seule couche de cellules derrière les massifs libériens, mais constitué par deux assises aux environs des pôles ligneux.

Faisceau bipolaire bien différencié, arrivé au stade primaire. Les pôles ligneux se trouvent dans le plan principal de symétrie de la plantule et se composent de cinq ou six trachées apparues successivement en direction centripète. La partie centrale n'est pas différenciée. A droite et à gauche, un massif libérien.

B. *Région d'insertion des cotylédons et de la tige principale.* — Dans la région supérieure de l'axe, à la base du nœud cotylédonaire (fig. 10), le cylindre central est relativement plus important; son rayon mesure, en effet, les deux cinquièmes du rayon

de l'axe hypocotylé. Quant au parenchyme cortical, il ne renferme que quatre ou cinq assises de cellules.

A un niveau un peu supérieur, les deux pôles ligneux sont très écartés l'un de l'autre (fig. 11). On trouve en outre six cordons procambiaux, savoir : deux antérieurs qui se rendent dans le cotylédon antérieur (*cot.*); deux postérieurs qui se rendent dans le cotylédon postérieur (COT.); deux latéraux qui sont les faisceaux médians de la première paire de feuilles (*fe* [1] à gauche, *fe* [1] à droite). Les faisceaux réparateurs (A, B, C, D), dont il sera question plus loin, ne sont pas encore distincts.

Une coupe pratiquée dans le bourgeon terminal montre (fig. 12) :

1° Les deux pétioles cotylédonaires ayant chacun un faisceau libéro-ligneux constitué par l'anastomose des deux massifs qui dans la figure 11 avoisinent chaque pôle ligneux centripète de l'axe hypocotylé. Cette origine anastomotique se reconnait encore, au niveau de la figure 12, par l'existence de deux pôles libériens dans chaque faisceau cotylédonaire (fig. 13);

2° La *fe* [1] et la *fe* [1], l'une à droite, l'autre à gauche, opposées;

3° La tige au stade du méristème primitif (M. *p.*).

C. *Racine principale.* — Une coupe transversale vers le milieu de la racine principale montre (fig. 14) :

1° A la surface, l'assise pilifère;

2° Le parenchyme cortical, comprenant six ou sept assises cellulaires. L'assise la plus interne est l'endoderme;

3° Le faisceau limité par un péricycle très net, formé par une seule assise de grandes cellules. Les deux massifs ligneux à développement centripète sont séparés par des cellules non différenciées. Deux massifs libériens alternent avec les pôles ligneux. Les arcs cambiaux n'existent pas encore.

Ce faisceau bipolaire à bois centripète n'est que la continuation de celui qu'on observe au milieu de l'axe hypocotylé.

STADE III.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Les feuilles de la première paire apparaissent successivement (pl. XVII, fig. 15) : *fe* [1] désigne la première de ces feuilles, adulte déjà ; *fe* [1], jeune encore, prendra, par la suite, un développement plus grand que *fe* [1].

L'axe hypocotylé a 16 millimètres de longueur et $0^{mm},5$ d'épaisseur en son milieu. Un peu en dessous du niveau qui sépare la racine principale de l'axe hypocotylé (collet superficiel), on voit une radicelle. Il en existe une autre plus bas.

STRUCTURE.

A. *Milieu de l'axe hypocotylé* (fig. 16) :

1° *Épiderme* avec stomates ;

2° *Parenchyme cortical :* Comme précédemment, sauf que certaines cellules des couches profondes et celles de l'endoderme se sont recloisonnées radialement;

3° *Cylindre central.* Les cellules du péricycle en face des pôles libériens sont disposées en une seule assise, tandis qu'en face des pôles ligneux, elles se sont recloisonnées de manière à former quatre ou cinq assises qui seront l'origine de deux arcs générateurs cambiformes. Le faisceau bipolaire contient du bois secondaire contre le bois primaire.

B. *Région d'insertion des cotylédons et de la tige principale* (fig. 17). — Dans la région supérieure de l'axe apparaissent, à droite et à gauche de la ligne qui joint les deux pôles ligneux centripètes, les pôles ligneux centrifuges qui vont se continuer respectivement dans la *fe* [1] et la *fe* [1]. A ce niveau, il y a donc quatre massifs ligneux en contact : deux centripètes appartenant à l'axe hypocotylé et deux centrifuges appartenant à la tige.

A un niveau un peu supérieur (fig. 18), les deux pôles centripètes s'écartent l'un de l'autre et les deux faisceaux centrifuges se trifurquent. Les deux faisceaux latéraux de chaque trifurcation sont des faisceaux cotylédonaires ; les faisceaux du milieu vont former les faisceaux sortants médians des *fe* [1] et *fe* [1]

et les faisceaux réparateurs. Ici apparaît donc nettement le contact entre le faisceau bipolaire de la racine d'une part et les faisceaux cotylédonaires, les faisceaux foliaires et les faisceaux réparateurs d'autre part. Dans la figure 18, les flèches indiquent dans quel sens se fait la différenciation ligneuse des faisceaux.

Quelques coupes plus haut (fig. 19), les pôles centripètes antérieur et postérieur fuient dans les cotylédons en même temps que les faisceaux cotylédonaires. Au centre de l'organe existe une moelle assez large, entourée de six faisceaux libéro-ligneux, savoir : les deux faisceaux sortants médians, destinés à la *fe* ^{1} et à la *fe* ^{I}, quatre faisceaux réparateurs A, B, C, D.

La région de contact entre le bois centripète et le bois centrifuge mesure de 2 à 3 millimètres de longueur.

Sur une coupe pratiquée dans le bourgeon terminal (fig. 20), on distingue :

1° Les deux pétioles cotylédonaires avec leur faisceau ;

2° La *fe* ^{1} et la *fe* ^{I}, l'une à droite avec un faisceau, l'autre à gauche avec trois faisceaux ;

3° La *fe* ^{2} et la *fe* ^{II} avec leurs faisceaux non encore différenciés ;

4° La tige au stade méristématique.

On remarquera que les deux premières paires de feuilles ne sont pas décussées.

En suivant la spire phyllotaxique [1] passant par *cot*, *fe* ^{1}, *fe* ^{2}, on trouve (fig 21) :

De *cot* à *fe* ^{1} : 88°.
De *fe* ^{1} à *fe* ^{2} : 37°.

Quant aux appendices d'une même paire, ils font entre eux les angles suivants :

De *cot* à COT : 187°.
De *fe* ^{1} à *fe* ^{I} : 180°.
De *fe* ^{2} à *fe* ^{II} : 192°.

(1) L'existence d'une spire phyllotaxique *dextre* ou *senestre* dans les premiers segments du *C. vitalba* est rendue évidente par ce fait que les feuilles d'une même paire sont inégales et que les paires successives ne sont pas régulièrement décussées. Ces particularités sont surtout apparentes dans les plantules plus âgées : nous aurons l'occasion d'y revenir aux stades suivants.

C. *Racine principale.* — Une coupe dans la racine principale, un peu au-dessous du collet superficiel, montre :

1° L'assise pilifère ;

2° Le parenchyme cortical comprenant six ou sept assises cellulaires, y compris l'endoderme ;

3° Le faisceau, limité par un péricycle formé d'une seule assise de cellules en face des pôles libériens, mais de trois assises en face des pôles ligneux. Les deux massifs ligneux primaires se sont rejoints au centre de la coupe ; les deux arcs cambiaux ont produit du bois secondaire. La constitution du faisceau de la racine principale ne diffère donc pas sensiblement de celle du faisceau au milieu de l'axe hypocotylé.

COTYLÉDONS.

Caractères extérieurs. — Les pétioles cotylédonaires mesurent 4 à 5 millimètres de longueur et 1 millimètre de largeur. Le limbe, de forme ovale, mesure 10 à 11 millimètres de longueur, 4 à 6 millimètres de largeur. La nervation est représentée par la figure 22.

Structure. — Rappelons d'abord que deux faisceaux se rendent dans chaque cotylédon en se fusionnant peu après leur sortie et en entraînant l'un des pôles du faisceau bipolaire de l'axe hypocotylé (fig. 23). A la base du pétiole, en effet, chaque faisceau cotylédonaire montre, outre le bois primaire centrifuge, quelques trachées à développement centripète venant de l'axe hypocotylé. Il y a deux pôles libériens non fusionnés.

La coupe au milieu du limbe montre (fig. 24) :

1° L'*épiderme* interne (supérieur), sans stomates, et l'épiderme externe (inférieur), muni de stomates au nombre de 40 par millimètre carré. Les figures 25 et 26 représentent ces deux épidermes vus de face ;

2° Le *mésophylle* à peu près homogène. Pas de cristaux, ni de poils, ni de glandes ;

3° Les *faisceaux* des nervures se terminant soit par une anastomose avec une autre nervure, soit en pointe libre dans le parenchyme.

STADE IV.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

L'axe hypocotylé mesure environ 2 centimètres de longueur; la racine principale porte des radicelles grêles (pl. XVIII, fig. 27). Au-dessus des cotylédons s'élève la tige principale, longue d'un peu plus de 3 centimètres et présentant trois nœuds visibles extérieurement. Outre les six feuilles insérées à ces nœuds, il y en a quatre autres plus ou moins cachées entre la base des pétioles des feuilles 3 et III. Les feuilles de chaque paire sont d'inégale grandeur : la plus petite est la plus ancienne ([1]). Les *fe* ^{1}, *fe* ^{I} et *fe* ^{2} sont simples, dentées; les autres sont trifoliolées, à folioles dentées.

STRUCTURE.

§ 1. Axe hypocotylé (fig. 28 et 35)

1° *Épiderme;*

2° *Parenchyme cortical :* Comme au stade précédent; endoderme à peine reconnaissable (pl. XIX, fig. 35);

3° *Cylindre central :* Massif ligneux primaire à deux pôles, entouré de toutes parts de bois secondaire. Celui-ci, composé de vaisseaux et de trachéides (fig. 36), a été engendré par une zone cambiale continue. Les vaisseaux sont plus nombreux à droite et à gauche du massif primaire. Le liber secondaire est peu abondant. Le péricycle s'est recloisonné et forme plusieurs couches. Contre le liber, un certain nombre des éléments péricycliques épaississent leurs parois et forment des fibres (fig. 35).

([1]) Les feuilles seront désignées par le numéro du nœud où elles sont insérées. Dans une paire quelconque, la feuille la plus ancienne, qui reste plus petite, sera désignée par un chiffre arabe, tandis que l'autre, plus récente et plus grande à l'état adulte, sera indiquée par un chiffre romain (fig. 27, 30, 31, etc.).

A la base du nœud cotylédonaire (fig. 29), les deux pôles ligneux centripètes se sont écartés l'un de l'autre, il existe une moelle assez large et l'on distingue de chaque côté du plan de symétrie trois faisceaux à développement centrifuge : de ces six faisceaux, quatre forment, en se réunissant deux à deux, les faisceaux cotylédonaires antérieur et postérieur (*cot.* et COT.); les deux autres faisceaux vont se trifurquer et produire les faisceaux médians de la *fe* I et de la *fe* 1, ainsi que les réparateurs A, B, C, D.

§ 2. Tige principale.

Parcours des faisceaux. — Dans le premier entre-nœud, on retrouve les six faisceaux qui existent dans le nœud cotylédonaire : deux foliaires et quatre réparateurs. La *fe* 1, formée la première, ne reçoit qu'un faisceau (M1), qui se trifurque en sortant. La *fe* I reçoit les trois faisceaux (LML)I; les deux foliaires latéraux sont fournis par A et D. La figure 30 représente la projection du premier nœud.

Chacune des feuilles suivantes reçoit trois faisceaux. Dans chaque paire, une feuille est insérée un peu plus bas que l'autre.

Le médian de la *fe* 2, la plus ancienne du nœud 2, est fourni par C et les deux latéraux par D et B. Le médian de la *fe* II est fourni par A et les deux latéraux par D et B. La figure 31 représente la projection du deuxième nœud.

Après la sortie dans la *fe* II, on trouve six faisceaux libéro-ligneux, quatre gros et deux petits; ces derniers proviennent respectivement de A et de C. Ces six faisceaux sont désignés A, A′, B, C, C′, D dans l'entre-nœud 3 (fig. 32).

Après la sortie dans la *fe* III, on ne trouve plus que cinq faisceaux : A, A′, B, C et D; le faisceau C′ s'est fusionné à B.

Le parcours des faisceaux dans la tige principale et leur sortie dans les feuilles sont indiqués dans la figure 33.

Phyllotaxie. — Les deux individus étudiés étaient senestres, c'est-à-dire que la spire phyllotaxique passant par les *fe* 1, 2, 3,..., tournait en sens inverse des aiguilles d'une montre. Les figures 34

et 38 montrent respectivement la spire phyllotaxique (¹) et la projection des appendices (²) d'un de ces individus.

En suivant la spire, on trouve les angles suivants :

De *cot* à fe^1 : 82°.
De fe^1 à fe^2 : 45°.
De fe^2 à fe^3 : 72°.
De fe^3 à fe^4 : 60°.
De fe^4 à fe^5 : 105°.

Quant aux appendices d'une même paire, ils font entre eux les angles suivants mesurés dans le sens de l'enroulement de la spire :

De *cot* à COT : 180°.
De fe^1 à fe^{I} : 188°.
De fe^2 à fe^{II} : 196°.
De fe^3 à fe^{III} : 200°.
De fe^4 à fe^{IV} : 222°.
De fe^5 à fe^{V} : 180°.

Histologie. — Une coupe transversale faite au milieu du troisième entre-nœud (fig. 32 et 37) montre :

1° *Épiderme;*

(¹) Dans les figures 34 et 38, la spire phyllotaxique passant par les $fe^{1}, {}^{2}, {}^{3}, \ldots$ semble dextre, mais les coupes ayant été pratiquées en tenant l'objet renversé (sommet de la tige en bas), les images sont symétriques de la disposition réelle.

(²) Pour obtenir la projection des appendices, lorsque les entre-nœuds de la tige sont déjà fortement allongés, je me suis servi de matériaux inclus à la celloïdine. J'ai d'abord copié à la chambre claire la coupe pratiquée dans le bourgeon terminal. Sur ce premier dessin, qui représente *exactement* la disposition des feuilles jeunes, j'ai ajouté la section des pétioles des feuilles plus âgées. La position de celles-ci peut être relevée à chacun des nœuds grâce à un trait de repère marqué au scalpel tout le long de la tige. Pour les feuilles âgées, le degré d'exactitude dépend donc de la rectitude du trait de repère et de l'absence de torsion des entre-nœuds. J'ai cherché à réaliser ces deux conditions aussi parfaitement que possible.

2° *Tissu fondamental.* Trois régions distinctes :

a) Région externe : parenchyme vert, lacuneux, avec collenchyme sous les côtes de la surface;

b) Région centrale ou moelle : grandes cellules à méats triangulaires;

c) Région interfasciculaire : parenchyme à cellules plus petites, sans méats.

3° *Faisceaux.* Bois primaire : trachées initiales précédées de quelques éléments procambiaux non différenciés (fibres primitives de M. Bertrand). Bois secondaire : vaisseaux et trachéides. Cambium : sept rangées radiales de cellules. Liber : liber secondaire peu distinct du liber primaire.

Entre le liber et le collenchyme se trouvent de nombreuses couches de cellules à parois minces, sans méats, destinées à devenir plus tard du sclérenchyme.

STADE V.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

A l'âge de 6 mois, la racine principale porte des radicelles nombreuses; l'axe hypocotylé, relativement fort court, n'a que 15 millimètres de longueur; la tige principale, haute de 60 centimètres environ, porte 13 à 15 paires de feuilles; les cotylédons sont tombés.

STRUCTURE.

§ 1. Axe hypocotylé.

1° L'*épiderme*.

2° Le *parenchyme cortical* est en partie écrasé et, en certains endroits, décortiqué (fig. 39).

3° Le *cylindre central*. Des rayons médullaires secondaires, pénétrant à des profondeurs variables, découpent le bois secondaire qui est très développé (fig. 40). Le liber présente des ilots d'éléments sclérifiés disposés à diverses profondeurs.

§ 2. Tige principale.

La tige principale peut se diviser en deux régions :

Première région. — Elle comprend les sept ou huit premiers segments [1]. Ils portent chacun une paire de feuilles inégales et insérées l'une un peu au-dessus de l'autre : c'est la plus petite feuille de chaque paire qui est insérée plus bas et qui a apparu la première. Au premier nœud, la *fe* ^{1} (la plus petite à l'état adulte) ne reçoit le plus souvent qu'un seul faisceau. La *fe* ^{1} reçoit trois faisceaux, un médian et deux latéraux. Les feuilles des paires suivantes reçoivent toutes trois faisceaux.

La spire phyllotaxique passant par les *fe* $^1, ^2, ^3$ ... est tantôt dextre, tantôt senestre. Les angles de divergence mesurés d'une

[1] Par *segment caulinaire*, il faut entendre un nœud de la tige avec l'entre-nœud qui précède.

petite feuille à la suivante sont renseignés dans le tableau suivant :

PREMIER INDIVIDU.

cot	
	> 71°
fe ¹	
	> 46°
fe ²	
	> 54°
fe ³	
	> 81°
fe ⁴	
	> 133°
fe ⁵	
	> 67°
fe ⁶	
	> 89°
fe ⁷	
	> 90°
fe ⁸	
	> 90°
fe ⁹	
	> 91°
fe ¹⁰	

(voyez fig. 41, pl. XX).

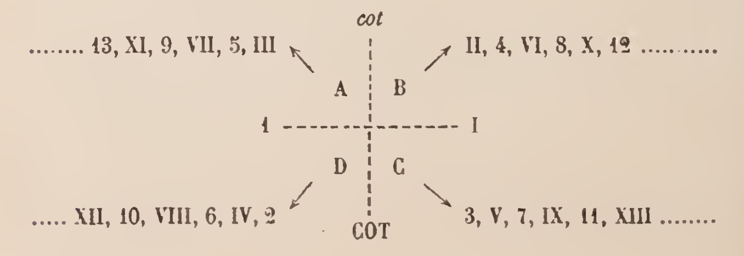
DEUXIEME INDIVIDU.

cot	
	> 89°
fe ¹	
	> 30°
fe ²	
	> 35°
fe ³	
	> 140°
fe ⁴	
	> 30°
fe ⁵	
	> 127°
fe ⁶	
	> 91°
fe ⁷	
	> 143°
fe ⁸	
	> 127°
fe ⁹	
	> 50°
fe ¹⁰	
	> 130°
fe ¹¹	
	> 87°
fe ¹²	
	> 94°
fe ¹³	
	> 90°
fe ¹⁴	
	> 90°.
fe ¹⁵	

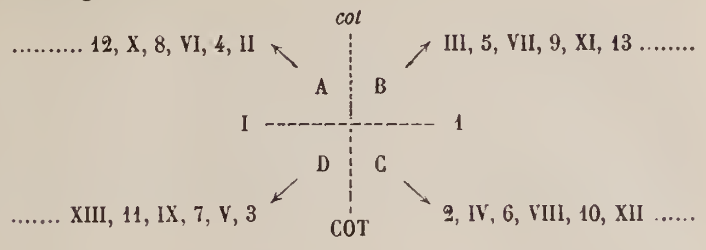
En résumé, dans cette première région, les deux feuilles d'une paire sont inégales; elles ne sont pas insérées rigoureusement au même niveau et, de plus, ne sont pas rigoureusement opposées l'une à l'autre. On peut voir dans cet arrangement un état intermédiaire entre la disposition spiralée des autres Renonculacées et la disposition franchement opposée-décussée qui caractérise les Clématidées adultes.

Si, à partir de la *fe* ², on envisage la série des feuilles successives, on constate que le faisceau médian de ces feuilles provient régulièrement des faisceaux A, B, C, D de la tige dans l'ordre suivant :

a) Pour un individu dextre :



b) Pour un individu senestre dont le parcours est représenté par la figure 46 :



Les faisceaux latéraux des feuilles d'une même paire se croisent quelquefois à leur sortie, d'un côté, comme on le voit à tous les nœuds du *Ranunculus arvensis* ([1]).

Dans cette première région, les entre-nœuds ont moins de douze faisceaux, ordinairement six gros et deux, quatre ou cinq petits; dans ce cas, il y a six côtes à la surface et la coupe a un aspect hexagonal (fig. 42). Il arrive parfois que l'un des six faisceaux principaux est plus petit que les autres; alors il y a cinq côtes seulement et la coupe a un aspect pentagonal (fig. 43), ce qui existe dans toute l'étendue d'autres Renonculacées. On peut aussi ne rencontrer que cinq gros faisceaux accompagnés de cinq petits; dans ce cas, deux gros faisceaux latéraux sont fusionnés en un seul; il y a aussi cinq côtes et la coupe a une forme pentagonale (fig. 44). Enfin, on observe quelquefois sept faisceaux, quatre gros et trois petits; quatre gros faisceaux latéraux sont soudés en deux et la coupe est circulaire (fig. 45).

Ces trois aspects singuliers si différents des entre-nœuds de la Clématite adulte s'observent dans toute l'étendue d'un entre-nœud au moins.

Quant aux nœuds, ils montrent des ramifications et des anastomoses de faisceaux peu régulières (fig. 46).

Seconde région. — A partir du septième ou du huitième segment, les feuilles sont franchement opposées-décussées, égales

([1]) *Contribution à l'etude anatomique des Renonculacées.* Le *Ranunculus arvensis* L., par M. Édouard Nihoul, *loc. cit.*

et insérées au même niveau. La tige a acquis ses caractères définitifs. Les entre-nœuds présentent douze faisceaux, six gros et six petits (fig. 47), et les nœuds montrent des ramifications et des anastomoses presque régulières se rapprochant de plus en plus de ce qui existe dans la tige adulte. Chaque feuille reçoit trois faisceaux. Les faisceaux latéraux ne se croisent plus à la sortie, comme cela a lieu à certains nœuds de la région précédente. La trifurcation des six gros faisceaux se fait dans la première moitié du nœud ; par suite, les faisceaux foliaires ont un trajet libre fort court.

Histologie. — Une coupe transversale dans un entre-nœud de la seconde région de la tige principale montre (fig. 47 et 48) :

1° L'épiderme ;

2° Le tissu fondamental externe : parenchyme vert, méatique, avec collenchyme sous les côtes de la surface ;

3° Une gaine de sclérenchyme, primitivement continue, plus tard interrompue çà et là. Elle est formée de fibres plus ou moins longues ; celles des côtes ne diffèrent pas de celles des sillons (fig. 47, 48, 49) ;

4° Un suber exfoliateur (1) ;

5° Des arceaux plus ou moins complets de fibres sclérifiées à l'extérieur du liber mou (fig. 47 et 48) (2) ;

6° Douze faisceaux, six gros et six petits, disposés sur un seul cercle, les petits plus écartés du centre de la tige. Ces faisceaux sont séparés les uns des autres par des cellules sclérifiées (rayons médullaires primaires) ;

7° La moelle, avec une lacune centrale. Ses cellules sont grandes et présentent des parois épaissies avec méats triangulaires.

(1) Ce suber n'existe pas encore dans la figure 50 représentant une tige plus jeune que celle de la figure 48.

(2) Ces fibres épaississent et sclérifient leurs parois assez tardivement. Elles ne sont pas encore caractérisées dans la figure 50, qui représente l'un des faisceaux pris dans une tige principale âgée de trois mois seulement. La figure 48, qui montre les fibres sclérifiées contre le liber, provient d'une tige principale âgée de six mois.

PLANTULES ANOMALES.

Sur vingt-cinq plantules possédant quatre feuilles visibles extérieurement, nous avons observé dix individus senestres, onze dextres et quatre anomaux. Dans ceux-ci, la fe^{2} est isolée par un long entre-nœud de la paire suivante. La figure 51 représente les caractères extérieurs d'un de ces individus ; la figure 52 montre sa vernation reconstituée et la figure 53 sa spire phyllotaxique.

On peut faire trois hypothèses pour expliquer la disposition des appendices dans les cas d'anomalie que nous signalons : il peut y avoir eu déplacement longitudinal de certaines feuilles, ou bien intercalation d'une feuille nouvelle, ou enfin suppression d'une feuille normale. Le tableau suivant indique ces trois explications hypothétiques en regard de la disposition normale. Dans ce tableau, les flèches vont de la feuille la plus âgée à la feuille la plus jeune de chaque paire.

DISPOSITION NORMALE.			1re HYPOTHÈSE.			2me HYPOTHÈSE.			3me HYPOTHÈSE.		
cot.		COT.	*cot.*		COT.	*cot.*		COT.	*cot.*		COT.
1	→	I	1	→	I	1			1	→	I
2	→	II	2			fe. intercalée			2		
3	→	III	3	←	II	2	→	II	3	→	III
4	→	IV	4	←	III	3	→	III	4	→	IV
5	→	V	5	←	IV	4	→	IV	5	→	V

L'étude du parcours des faisceaux ne permet d'admettre, pour l'interprétation des anomalies, que la première des trois hypothèses. En effet, dans la figure 54, on voit que les faisceaux de la fe^{II}, au lieu de se détacher au niveau habituel marqué d'une *, se détachent seulement au troisième nœud qui porte, en même temps, la fe^{3} normale. De plus, on constate qu'au nœud ^{3} la fe^{II} est plus âgée que la fe^{3} ; qu'au nœud ^{4}, la fe^{III} est en avance

sur la *fe*^{4} et ainsi de suite. Il y a donc bien eu déplacement de toutes les *fe*^{II}, ^{III}, ^{IV}, les *fe*^{3}, ^{4}, ^{5} restant en place.

D'ailleurs, le même fait de déplacement longitudinal a été remarqué au nœud^{7} d'une autre plantule plus âgée.

Ces anomalies rendent plus évidente encore la disposition spiralée des appendices dans la région inférieure de la tige principale du *C. vitalba* et relient ainsi le type oppositifolié au type spiralé des autres Renonculacées.

§ 3. Feuilles.

Caractères extérieurs. — Les feuilles des premières paires ont une forme plus simple et une taille plus petite que les feuilles situées plus haut. Les figures 67 et 68 (pl. XXIV) représentent la *fe*^{1} et la *fe*^{3}.

La *fe*^{1} est simple, dentée et mesure 13 millimètres de longueur, pétiole compris. Le faisceau qu'elle reçoit de la tige se trifurque à sa sortie. La branche médiane et l'une des branches latérales se bifurquent dans la partie supérieure du pétiole ; deux des rameaux ainsi formés s'anastomosent, de sorte que le limbe possède dès sa base quatre fortes nervures qui se ramifient pour former un réseau assez compliqué de nervilles. Celles-ci se terminent en pointe libre ou par une anastomose.

La *fe*^{3} est trifoliolée et mesure, pétiole compris, $5\ ^{1}/_{2}$ centimètres de longueur. Chaque pétiole possède dès sa base trois fortes nervures.

La *fe*^{6} est déjà semblable à la feuille de la plante adulte.

Parcours et histologie. — Ils ont été étudiés dans la *fe*^{6} et trouvés semblables à ceux de la feuille adulte, qui sera décrite complètement au chapitre III.

§ 4. Racine principale.

La racine principale a une structure semblable à celle de l'axe hypocotylé, sauf que son parenchyme cortical est presque entièrement détruit et que, dans le cylindre central, les ilots libériens et les rayons médullaires secondaires sont beaucoup moins nombreux.

CHAPITRE III.

LA PLANTE ADULTE.

§ 1. LES TIGES.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Durant le premier hiver, la partie supérieure de la tige principale se détruit; au printemps suivant, les bourgeons axillaires de la partie inférieure qui a subsisté se développent en longues tiges. Celles-ci ont le même sort que la tige principale l'hiver suivant. Lorsque, après un nombre d'années variable selon les circonstances, la plante est devenue adulte, elle n'a donc gardé que les portions persistantes de la tige principale et de plusieurs tiges axillaires successives. Quant à l'axe hypocotylé, il se confond alors avec la racine principale.

A chaque printemps, les bourgeons axillaires de l'année précédente donnent naissance à de longues tiges sarmenteuses, toutes équivalentes et à croissance indéterminée. Il n'est pas rare d'en trouver qui mesurent 4 à 5 mètres de longueur. Chacune d'elles comprend deux régions :

1° *La région à structure variable*, longue de quelques millimètres seulement, comprenant les deux, trois ou quatre premiers segments : les nœuds, très rapprochés, portent des feuilles de plus en plus grandes et de forme de plus en plus compliquée (fig. 70 et 73, pl. XXIV). Les bourgeons axillaires ne se développent généralement pas. La tige, dans cette région, est plus ou moins renflée.

2° *La région à structure constante*, comprenant un nombre indéterminé de segments à longs entre-nœuds et à feuilles toutes à peu près semblables. Dans cette seconde région, les bourgeons

axillaires se comportent de diverses manières : les premiers (ordinairement 8 à 10 paires) restent latents; ils sont destinés à passer l'hiver et à produire de nouvelles tiges feuillées; les bourgeons suivants (ordinairement 5 ou 6 paires) se développent immédiatement en inflorescence; les derniers (ordinairement 2 ou 3 paires) cessent de pousser comme le bourgeon terminal lui-même ([1]).

Parfois le bourgeon terminal reprend sa croissance et produit des segments à bourgeons latents, puis une nouvelle série de segments florifères.

Normalement, les tiges ne portent pas de rameaux durant la première année, si ce n'est des inflorescences axillaires. Celles-ci manquent même lorsque la tige est grêle, tous les bourgeons restant latents.

Lorsqu'une tige a été brisée accidentellement, un ou plusieurs des bourgeons destinés à n'entrer en végétation que l'année suivante peuvent se développer immédiatement. Si l'accident s'est produit au milieu des segments florifères, un bourgeon-inflorescence se transforme en une tige feuillée. Celle-ci se reconnaît cependant à ce qu'elle porte des fleurs dès ses premiers nœuds, tandis qu'elle n'en porte pas plus haut.

De tout cela il faut conclure que, hormis les axes d'inflorescence, les tiges du *C. vitalba* sont toutes équivalentes : la distinction en tige primaire et tiges secondaires ou rameaux plus ou moins différenciés n'existe pas. L'examen anatomique ayant confirmé cette affirmation, nous ne nous occuperons par la suite que d'une tige quelconque de la plante adulte, sans rechercher *l'ordre* auquel elle appartient.

([1]) La plus longue tige que nous ayons trouvée mesurait plus de 5 mètres; sa deuxième région comprenait 30 segments portant 6 paires de bourgeons latents, 21 paires d'inflorescences et 3 paires de bourgeons non développés.

STRUCTURE.

I. *Région à structure variable :*

Une tige quelconque reçoit de la tige-mère deux faisceaux (*faisceaux d'insertion*) détachés des deux faisceaux réparateurs qui, dans la tige-mère, sont voisins du *sortant médian.* Ces deux faisceaux se trifurquent bientôt et constituent les six *gros* faisceaux du premier segment de la tige que nous considérons. De *petits* faisceaux apparaissent plus tard et en nombre variable : généralement il y a six petits faisceaux, mais il peut s'en trouver jusqu'à dix ou douze. Ce grand nombre de petits faisceaux intercalés entre les gros est évidemment en rapport avec le diamètre exagéré de la tige qui, dans cette première région, est toujours plus ou moins renflée. C'est par l'intermédiaire de ces faisceaux *intercalaires* et en quelque sorte surnuméraires que s'établit une communication facile entre les tissus secondaires de la tige nouvelle et ceux de la tige-mère.

Quant au parcours des faisceaux (fig. 64, pl. XXIII), il offre dans cette région quelques irrégularités, tout en se rapprochant beaucoup du parcours normal.

II. *Région à structure constante :*

Le nombre des faisceaux est toujours de douze : six gros et six petits dont le parcours est parfaitement régulier. Dans cette seconde région, nous étudierons l'histogenèse, l'histologie et le parcours détaillé.

Histogenèse et parcours. — En étudiant des coupes successives dans le sommet végétatif, on trouve de haut en bas :

1° *Stade méristématique.* Un massif de cellules se cloisonnant en tous sens et entouré par le dermatogène (fig. 55, pl. XXII) ;

2° *Stade procambial* (dans l'étendue de deux segments). Six cordons de procambium, nettement reconnaissables au sein du tissu fondamental (fig. 56).

Plus bas encore, deux des cordons procambiaux présentent une trachée et deux éléments libériens (fig. 57 et 58) : ce sont les deux faisceaux sortants médians ; les autres faisceaux ne se différencient que plus bas. Les cellules procambiales comprises entre le pôle libérien et le tissu fondamental externe (actuellement trois ou quatre couches) doivent se recloisonner un grand nombre de fois pour se différencier ensuite en un ilot de sclérenchyme. Les quatre ou cinq couches de tissu fondamental externe se recloisonneront aussi pour devenir du collenchyme ;

3° *Stade primaire* (deux segments). L'entre-nœud a six faisceaux différenciés (fig. 59 et 60) montrant chacun cinq ou six trachées. Dans le nœud, chaque faisceau se trifurque en une branche foliaire et deux branches réparatrices. Les six foliaires sortent et les branches réparatrices s'anastomosent deux à deux pour reconstituer les six faisceaux réparateurs destinés à l'entre-nœud suivant. Ce parcours simple, régulier, s'observe également dans l'*Atragene alpina.*

A ce stade, les cellules procambiales avoisinant le liber et destinées à devenir du sclérenchyme sont plus nombreuses (fig. 60) (1). Le tissu fondamental externe montre aussi un plus grand nombre d'assises; ses éléments sont assez larges ;

4° *Stade secondaire.* Dans les Clématites à grandes feuilles, comme le *C. vitalba,* six autres faisceaux apparaissent dans l'intervalle entre les six précédents. Ils se montrent d'abord à l'état de procambium, à l'époque où les faisceaux principaux sont complètement différenciés et viennent d'entrer dans la période secondaire (fig. 61, pl. XXIII). Ils restent à cet état procambial

(1) M. Dangeard (*Le Botaniste,* vol. I, p. 117) n'admet pas l'existence d'un péricycle dans les tiges, mais distingue dans le liber deux parties : le *périphragme* et la *région des ilots grillagés.* Le périphragme « est produit par un cloisonnement actif des cellules procambiales qui entourent les ilots grillagés ». Cette production est relativement tardive et aboutit à un tissu entièrement cellulaire ou accompagné de fibres qui, d'après l'auteur, peuvent s'appeler indifféremment fibres libériennes ou périphragmatiques. J'ai cru convenable de noter ici cette observation à l'appui de celles que j'ai faites dans le *C. vitalba.*

dans l'étendue de quatre ou cinq segments, puis se différencient à leur tour.

Ces *petits faisceaux* sont non seulement caractérisés par leur apparition tardive, mais encore par leur plus grand éloignement du centre, leur développement moins grand, leur histologie et leur parcours. Les auteurs leur ont donné le nom de *faisceaux intercalaires.*

Au point de vue histologique, ils se distinguent par l'absence de trachées ou par un nombre plus petit de ces éléments. Au point de vue du parcours, ils commencent dans la moitié inférieure d'un nœud par deux branches qui s'anastomosent en un faisceau; celui-ci traverse tout l'entre-nœud et se bifurque dans la moitié inférieure du nœud suivant. En d'autres termes, ils commencent et finissent aux faisceaux réparateurs (fig. 65). Ces petits faisceaux rappellent par leur position, leur parcours et l'époque de leur apparition, les massifs secondaires qui s'intercalent entre les faisceaux chez beaucoup de Dicotylédones, notamment les faisceaux désignés par γ dans l'*Urtica* [1].

Quant aux autres faisceaux, que nous appellerons les gros faisceaux, ils marchent parallèlement dans l'entre-nœud comme les petits. Au nœud, ils se trifurquent, puis s'anastomosent deux à deux très régulièrement (fig. 65).

Histologie. — Une tige âgée d'un an, prise sur la plante adulte, montre la même organisation que la tige principale au stade V.

Dans une tige de 4 ans, on distingue de l'extérieur vers l'intérieur (fig. 62 et 63) :

1° Le suber exfoliateur de l'épiderme, du tissu fondamental externe et de la gaine de sclérenchyme;

2° Un premier cercle ondulé formé d'arceaux scléreux extérieurs à chaque massif libérien ;

[1] *Recherches anatomiques sur les organes végétatifs de l'*Urtica dioïca *L.*, par M. A. Gravis. (Mémoires in-4° de l'Académie royale des sciences, etc. de Belgique, t. XLVII, 1884.)

3° Une bande de liber, dont beaucoup d'éléments sont à l'état corné;

4° Un deuxième suber exfoliateur qui rejettera au dehors la première assise exfoliatrice, les premiers arceaux scléreux et la portion de liber qui leur est sous-jacente;

5° Un parenchyme libérien méatique comprenant trois ou quatre couches de cellules contenant de l'amidon ;

6° Un deuxième cercle formé d'arceaux scléreux;

7° Une bande de liber;

8° Le cambium;

9° Le bois, comprenant quatre régions concentriques très visibles, correspondant chacune à une année. Les vaisseaux ont un grand diamètre;

10° Douze pôles ligneux primaires;

11° La moelle, dont les éléments offrent des parois épaissies et des méats triangulaires.

Les douze faisceaux, serrés les uns contre les autres, sont séparés par des rayons médullaires primaires, présentant une partie externe molle et une partie interne sclérifiée. Chaque faisceau est divisé par des rayons secondaires qui pénètrent plus ou moins profondément.

Tissus amylifères. Le méristème primitif ne renferme pas d'amidon. Au niveau où se forment les six massifs procambiaux, à quelques millimètres du sommet, on trouve de l'amidon dans la moelle et le tissu fondamental primaire externe. Il en est de même plus bas, où les massifs procambiaux se différencient. A partir du niveau où apparaissent, à l'état procambial, les six petits faisceaux (à environ 2 centimètres du sommet), la substance amylacée manque dans la moelle, mais on en trouve dans le tissu fondamental primaire externe, y compris le collenchyme en formation, et dans deux ou trois couches de cellules sur les côtés des gros faisceaux. Au niveau où les douze faisceaux sont différenciés, ainsi que le collenchyme et le sclérenchyme, on trouve en outre de l'amidon dans le liber jeune.

Une tige âgée d'un an, dans laquelle une couche subéreuse s'est déjà formée, contient de l'amidon dans la moelle, les rayons

médullaires, le liber jeune, le tissu fondamental secondaire externe, et dans une ou deux couches extérieures au liber, en dessous du suber. L'amidon manque dans le tissu fondamental primaire externe.

Dans une tige âgée de quatre ans, l'amidon se rencontre dans la moelle, les rayons médullaires, le liber jeune et dans le parenchyme libérien sous-jacent au deuxième suber.

Il n'existe nulle part, dans la tige, une couche distincte à laquelle on puisse donner le nom d'*endoderme amylifère.*

Il n'existe pas non plus d'endoderme caractérisé par des plissements sur les cloisons radiales.

§ 2. LES FEUILLES.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Les feuilles d'une tige quelconque ont une forme et une taille variables suivant la hauteur à laquelle elles sont insérées. Les variations sont surtout rapides dans la première région de la tige où les feuilles, très rapprochées les unes des autres, sont insérées par paire au même niveau et décussées, contrairement à ce que l'on observe à la base des tiges principales. La première paire de feuilles se trouve dans le plan perpendiculaire au plan médian du segment qui porte le bourgeon. Deux tiges ont été principalement étudiées.

Dans la première, qui est senestre (fig. 70), la *fe* ^{1} rudimentaire comprend un pétiole élargi, un limbe long de 4 millimètres, large de 1 millimètre, et trois nervures qui ne se ramifient pas (fig. 71). La *fe* ^{1} possède un limbe denté, long de 8 millimètres (fig. 72), large de 2; trois faisceaux, le médian se ramifiant abondamment. La *fe* ^{2} est trilobée, à lobes dentés; la *fe* $^{\prime\prime}$ est trifoliolée, à folioles dentées. Les feuilles de la troisième paire ont trois folioles dentées. Les feuilles de la quatrième paire possèdent cinq folioles.

Dans la seconde tige, qui est dextre (fig. 73), les feuilles de la première paire sont simples et dentées (fig. 74 et 75); la *fe* ^{2} a trois folioles et la *fe* $^{\prime\prime}$ cinq ; les feuilles de la troisième paire sont trifoliolées ; les feuilles suivantes possèdent cinq folioles.

La deuxième région des tiges porte des feuilles qui varient peu de forme et de dimensions. Elles ont cinq folioles et plus rarement sept (fig. 76). Elles sont toujours dépourvues de stipules; leur pétiole se continue en un rachis présentant deux ou trois nœuds donnant insertion aux folioles.

STRUCTURE.

Toutes les feuilles reçoivent trois faisceaux ; celles de la première paire cependant n'en reçoivent parfois qu'un seul. Nous prendrons comme exemple une feuille ordinaire soit à cinq, soit à sept folioles. (Il a été constaté que la structure était sensiblement la même dans ces deux sortes de feuilles.)

Parcours. — Les trois faisceaux sortants de la tige (un médian, deux latéraux, soient L, M, L) se trifurquent dès la base du pétiole, puis s'anastomosent (fig. 66), de façon à constituer six faisceaux : un médian, deux latéraux, deux marginaux et un faisceau diamétralement opposé au médian, soient *m*LML*m*O. Telle est la structure au milieu du pétiole (fig. 77).

Cette structure se retrouve au milieu du premier entre-nœud ou rachis, ainsi qu'au milieu du deuxième entre-nœud.

Au premier nœud du rachis, c'est-à-dire à l'insertion de la première paire de folioles, on constate (fig. 78) que chaque pétiolule reçoit deux faisceaux détachés des faisceaux L et *m*. Ces faisceaux se divisent bientôt et s'anastomosent de façon à constituer les six faisceaux du pétiolule (fig. 79). La même chose s'observe au deuxième nœud du rachis.

La figure 66 reproduit le parcours des faisceaux dans le pétiole et le rachis. On y remarquera l'analogie existant entre l'insertion du pétiolule et celle du bourgeon, comme dans l'*Urtica* (1).

On trouve parfois des feuilles très vigoureuses qui contiennent dans leur pétiole et leur rachis un ou deux petits faisceaux intermédiaires entre le faisceau M et les L et deux *m'* entre le faisceau O et les *m* (fig. 80). Ces petits faisceaux ne jouent aucun rôle dans l'insertion des pétiolules.

Quant au faisceau O, il se divise à la base de la foliole terminale, s'anastomose avec les faisceaux voisins et donne finalement de chaque côté deux petites branches qui se dirigent vers les bords inférieurs du limbe.

(1) M. A. Gravis, *loc. cit.*, p. 180.

Histologie du limbe. — La coupe transversale d'une foliole (fig. 81) montre :

1° *L'épiderme.* Cellules sans chlorophylle, à cuticule lisse, plus grandes à la face interne qu'à la face externe. Stomates à la face externe seulement, au nombre de soixante-deux par millimètre carré, formés chacun de deux cellules de bordure au niveau de la surface avec deux replis saillants de la cuticule. Chambre stomatique formée par un grand méat. Vu de face, l'épiderme présente des cellules à contour sinueux, des stomates arrondis, sans cellules annexes (fig. 82 et 83). Sur les nervures, les cellules épidermiques, presque rectangulaires, sont allongées dans le sens de la longueur des nervures. Deux sortes de poils : les uns longs, droits, effilés, à membrane plus épaisse d'un côté que de l'autre; les autres courts, en forme de massue (fig. 84). Ces deux sortes de poils sont très abondants sur la tige et les feuilles dans le sommet végétatif. Les poils claviformes tombent assez tôt, de sorte que sur les feuilles vieilles on ne rencontre plus guère que des poils longs et effilés; encore ceux-ci sont-ils peu abondants;

2° *Le mésophylle.* Il est hétérogène (fig. 81) : une assise de cellules en palissade; trois ou quatre assises de cellules irrégulières à grands méats constituant le parenchyme spongieux. Collenchyme aux deux faces, de chaque côté des nervures. Chlorophylle dans tout le mésophylle. Ni cristaux ni glandes;

3° *Les nervures.* Elles sont constituées par un seul faisceau; pas de cellules sclérifiées.

Histogenèse. — Sur la troisième coupe, dans le sommet végétatif d'une tige adulte, on peut étudier la formation des nervures dans l'épaisseur de l'assise moyenne du mésophylle primitif (fig. 85). Les deux autres assises sont destinées à donner naissance, l'une au parenchyme palissadique, l'autre au parenchyme spongieux. Il est surprenant de constater qu'une disposition si nette à l'état jeune s'efface complètement à l'état adulte. (Comparez les figures 85 et 81, dessinées au même grossissement.)

§ 3. LES RACINES.

I. Sommet végétatif d'une jeune racine.

Coupes transversales.

La quatorzième coupe à partir du sommet montre de l'extérieur vers l'intérieur (fig. 86, pl. XXV) :

1° La *coiffe*, formée à ce niveau de cinq ou six couches de cellules, et l'*assise pilifère*, composée de cellules allongées dans le sens radial, à parois minces;

2° Le *parenchyme cortical*, constitué par dix assises cellulaires méatiques. Les éléments des assises extérieures sont plus petits que les autres. L'assise la plus profonde est l'endoderme : celui-ci ne se distingue guère que par l'alternance de ses éléments avec ceux de l'assise sous-jacente;

3° Le *cylindre central*, limité par un péricycle assez net, à cellules plus grandes que les autres, presque isodiamétrales. Le reste du massif est formé par de petits éléments procambiaux.

La vingt-cinquième coupe à partir du sommet montre de l'extérieur vers l'intérieur (fig. 87) :

1° Les débris de la *coiffe* et l'*assise pilifère* dont les cellules sont épaissies extérieurement;

2° Le *parenchyme cortical*, comme au niveau précédent;

3° Le *cylindre central* au stade de la différenciation primaire. Il présente deux ou trois pôles libériens et autant de pôles ligneux.

Plus tard apparaît la zone cambiale comme on le voit dans la figure 88 où le faisceau est bipolaire.

Coupe longitudinale.

La figure 89 montre le méristème primitif comprenant :

1° Un groupe de petites cellules isodiamétrales se cloisonnant

en tous sens et donnant naissance à des éléments procambiaux : ce sont les *initiales du faisceau ;*

2° Deux cellules exactement superposées, *initiales du parenchyme cortical ;*

3° Une couche de cellules, *initiales de l'assise pilifère et de la coiffe.*

II. Racine d'un an.

De l'extérieur vers l'intérieur (fig. 90, 91 et 92) :

1° Les débris du parenchyme cortical primaire et l'endoderme ;

2° Le péricycle recloisonné formant un « parenchyme péricyclique » ;

3° Le cylindre central dont les productions secondaires sont fort développées. Deux longs rayons primaires, légèrement sclérifiés, s'étendent jusqu'aux pôles primaires. Des rayons secondaires pénétrant à des profondeurs variables découpent le bois secondaire formé de larges vaisseaux et d'une grande quantité de trachéides. Le liber a ses éléments disposés en séries radiales. Il renferme des bandes tangentielles irrégulières de fibres scléreuses.

III. Racine de deux ans.

Les rayons secondaires sont plus nombreux ; les bandes tangentielles de fibres sclérifiées plus abondantes et plus développées que dans la racine précédente (fig. 93). La séparation entre le bois de chaque année est indiquée par des vaisseaux de large diamètre. A la périphérie, un premier suber a décortiqué le parenchyme péricyclique. Au-dessous des bandes scléreuses les plus externes, on voit un deuxième suber constitué par deux ou trois assises de cellules brunes (fig. 94).

RÉSUMÉ DE LA PREMIÈRE PARTIE.

EMBRYON.

L'embryon du *Clematis vitalba* diffère peu de celui du *Ranunculus arvensis* : ses dimensions sont à peu près les mêmes, mais les couches cellulaires de son parenchyme cortical sont moins nombreuses (six au lieu de onze).

PLANTULES.

L'étude de l'*axe hypocotylé* a montré que le contact entre les faisceaux cotylédonaires, les faisceaux foliaires et les faisceaux réparateurs, d'une part, et le faisceau bipolaire de la racine, d'autre part, se fait comme dans le *Ranunculus arvensis*.

Les *cotylédons* possèdent un mésophylle à peu près homogène et des stomates à la face externe seulement ; ils ne présentent ni cristaux, ni poils, ni glandes; ils sont opposés et reçoivent chacun deux faisceaux qui se fusionnent dès la base du pétiole.

Les *feuilles* des premières paires de la tige principale ont une forme plus simple et une taille plus petite que les feuilles situées plus haut. On trouve d'abord des feuilles dentées, puis trilobées, trifoliolées et enfin des feuilles à cinq folioles. Celles de la première paire sont d'inégale grandeur et insérées à des niveaux légèrement différents; au nœud 1, la feuille qui apparaît la première (fe^{1}) est située plus bas et prend un moins grand développement que l'autre (fe^{1}). De plus, la fe^{1} ne reçoit généralement qu'un seul faisceau, tandis que la fe^{1} en reçoit trois. Ces

trois caractères (apparition successive, inégalité de taille à l'état adulte et différence de niveau d'insertion) se retrouvent aux six ou sept nœuds suivants; les feuilles de ces nœuds reçoivent chacune trois faisceaux, provenant toujours des réparateurs A, B, C, D. On peut faire passer une spirale régulière, tantôt dextre, tantôt senestre, par les feuilles les plus jeunes ou par les feuilles les plus âgées de chaque paire. Ces appendices sont cependant placés en croix, mais non rigoureusement opposés l'un à l'autre.

A partir du huitième ou neuvième nœud, les feuilles de chaque paire sont franchement opposées-décussées, égales, insérées au même niveau et apparaissent simultanément; elles reçoivent toutes trois faisceaux.

La *tige principale* comprend deux régions qui correspondent aux deux manières d'être des feuilles :

1° La région à structure variable, formée des sept ou huit premiers segments. Les entre-nœuds contiennent moins de douze faisceaux; ordinairement six gros (parfois cinq seulement) et deux, quatre ou cinq petits. Dans les nœuds, le parcours de ces faisceaux est très irrégulier et fort variable;

2° La région à structure constante, à partir du huitième ou neuvième segment. Les entre-nœuds renferment toujours douze faisceaux (six gros et six petits) qui se ramifient et s'anastomosent d'une façon très régulière dans les nœuds. Cette structure se retrouve dans la plante adulte.

Il arrive que certains nœuds ne portent qu'une feuille, l'autre ayant été reportée au nœud suivant. Cette anomalie rend plus évidente la spire qui existe dans la région inférieure des individus normaux. On peut dire que la disposition opposée-décussée de la Clématite n'est pas primordiale, mais que le type décussé provient d'ancêtres à feuilles spiralées.

D'un autre côté, l'existence assez fréquente de cinq gros faisceaux et de cinq côtes aux premiers entre-nœuds des tiges principales rappelle d'une façon étonnante la disposition par cinq qu'on observe fréquemment chez d'autres Renonculacées, notamment le *Ranunculus arvensis*. Si nous comparons cette dernière plante au *Clematis vitalba* au point de vue du nombre des fais-

ceaux de la tige et de la disposition des feuilles, nous obtiendrons le tableau suivant :

	RANUNCULUS ARVENSIS.		CLEMATIS VITALBA.	
	Faisceaux dans la tige.	Disposition des appendices.	Faisceaux dans la tige.	Disposition des appendices.
Cotylédons et 1re paire de feuilles . .	4	Opposition.	4	Opposition.
Nœuds 2 à 7 .	5	Alternance.	Souvent 5 gros.	Disposition spiralée plus ou moins évidente.
Nœuds suivants	5	Alternance.	Toujours 6 gros.	Opposition acquise.

La croissance de la tige principale est indéterminée ; le premier hiver détruit toute la partie supérieure de cette tige.

La *racine principale* contient un faisceau bipolaire et prend un grand développement. Le parenchyme cortical se décortique. Une assise subéreuse à la surface.

PLANTE ADULTE.

1. Tiges. — Toutes les tiges de la plante adulte sont équivalentes. Leur croissance est indéterminée : aucune simplification ne se manifeste dans leur structure vers l'extrémité en automne. Elles reçoivent deux faisceaux de la tige-mère. On doit distinguer deux régions. Dans la première, longue de quelques millimètres et comprenant deux, trois ou quatre segments, on trouve six gros faisceaux provenant de la trifurcation des faisceaux d'insertion et un nombre variable de petits faisceaux apparaissant plus tard ; le parcours est irrégulier, mais se rapproche néanmoins du parcours normal. La deuxième région, comprenant un nombre indéterminé de segments à longs entre-

nœuds, renferme dans toute son étendue douze faisceaux dont six gros réparateurs et six intercalaires plus petits. Tous marchent parallèlement dans les entre-nœuds. Les premiers se trifurquent un peu en dessous du nœud ; par suite, les faisceaux foliaires ont dans la tige un trajet libre fort court. Après la sortie des foliaires, des anastomoses très régulières reconstituent les six réparateurs. Quant aux intercalaires différenciés plus ou moins tardivement, ils n'ont aucun rapport avec les feuilles ; ils commencent aux réparateurs d'un nœud pour finir aux réparateurs du nœud suivant.

De l'ensemble des études d'histologie et d'histogenèse, on peut conclure que, dans la tige, l'écorce n'est pas nettement limitée vers l'intérieur, si ce n'est derrière les faisceaux. Il y a lieu de distinguer dans le tissu fondamental trois régions : une interne, des interfasciculaires et une externe. On ne remarque ni endoderme continu ni assise plissée ou amylifère. La gaine continue de sclérenchyme est formée de portions intrafasciculaires et de portions interfasciculaires. Les premières se différencient avant les secondes, mais, à l'état adulte, il n'est pas possible de les distinguer histologiquement l'une de l'autre. Dans les deux portions, il y a des fibres longues et des fibres courtes, toutes sans méats, de même diamètre et à parois également épaissies.

La partie inférieure des tiges est seule persistante ; le reste est détruit pendant l'hiver.

2. Feuilles. — Les feuilles des tiges axillaires sont polymorphes comme celles de la tige principale, mais celles d'une même paire apparaissent en même temps, sont insérées au même niveau et se développent également. D'ordinaire les feuilles de la première paire sont plus ou moins rudimentaires et simplement dentées ; celles de la deuxième paire, trilobées ou trifoliolées ; les suivantes ont cinq ou sept folioles. Les deux premières feuilles reçoivent tantôt un, tantôt trois faisceaux ; les autres, toujours trois. Les folioles s'attachent sur le pétiole commun à peu près comme le bourgeon sur la tige-mère.

Quant à l'histologie des feuilles, elle varie peu. L'épiderme

externe seul est percé de stomates; ceux-ci sont au niveau de la surface et surmontés de deux replis saillants de la cuticule; il n'y a ni glandes ni cristaux, mais des poils unicellulaires simples, droits, effilés, à membrane plus épaisse d'un côté que de l'autre. Sur le sommet de la tige et les feuilles jeunes, on rencontre en outre des poils claviformes; ceux-ci tombent assez tôt, de sorte qu'on n'en trouve plus sur les feuilles situées plus bas.

Au point de vue de l'histogenèse, trois assises cellulaires constituent le mésophylle de la feuille jeune : l'assise interne produit le parenchyme en palissade; l'assise externe engendre le parenchyme spongieux; l'assise moyenne donne naissance aux nervures, puis se confond avec le parenchyme spongieux.

3. Racines. — Elles contiennent un faisceau bi- ou tripolaire. Tissus secondaires abondants; décortication du parenchyme cortical et production d'une couche subéreuse.

SECONDE PARTIE

CHAPITRE PREMIER.

Clematis integrifolia L.

§ 1. LES PLANTULES.

1. Axe hypocotylé. — Long d'environ 1 centimètre (fig. 95). Le Tf^{2i} en face des deux pôles ligneux est formé d'éléments sclérifiés (fig. 96). Le contact entre les faisceaux cotylédonaires, les faisceaux foliaires et les faisceaux réparateurs, d'une part, et le faisceau bipolaire de la racine, d'autre part, se fait comme dans le *C. vitalba*.

2. Cotylédons. — Ils sont épigés. Le pétiole et le limbe mesurent chacun plus d'un centimètre (fig. 95). Chaque cotylédon reçoit trois faisceaux ; le médian est formé, comme dans le *C. vitalba*, de deux faisceaux sortis de l'axe hypocotylé avec les pôles centripètes ; les latéraux se détachent des faisceaux M^1 et M' (fig. 97 et 99). Le limbe cotylédonaire est parcouru par sept nervures. Histologie comme dans le *C. vitalba*.

3. Tige principale. — Quatre faisceaux ; section carrée. Au point de vue histologique, rien de particulier.

La figure 99 montre le parcours dans la tige et leur sortie dans les feuilles.

4. Feuilles. — Les feuilles de la première paire sont écailleuses (fig. 95); elles ne reçoivent qu'un faisceau. L'entre-nœud 1 est presque nul. Les feuilles de la deuxième paire sont peu développées et d'inégale grandeur; la plus petite, qui est la plus ancienne, ne reçoit qu'un faisceau; la plus grande en reçoit trois. Les feuilles suivantes sont entières, ovales-lancéolées, sessiles, toutes à peu près égales; elles reçoivent trois faisceaux (fig. 99).

Histologie comme dans le *C. vitalba*. L'histogenèse permet de déceler l'existence d'une assise moyenne dans le mésophylle des feuilles jeunes. C'est dans l'épaisseur de cette assise moyenne qui s'arrête à quelque distance des bords du limbe, que les nervures prennent naissance par le recloisonnement d'une cellule. Cette genèse est bien évidente, notamment pour les faisceaux latéraux dans la figure 98 qui représente la section transversale du limbe de la *fe*^{II} provenant d'une plantule au début de la germination.

5. Racine principale. — Faisceau bipolaire; endoderme mieux caractérisé que dans le *C. vitalba*.

§ 2. TIGE DE LA PLANTE ADULTE.

Structure. — Six gros faisceaux et six petits; leur parcours dans la tige et leur sortie dans les feuilles sont absolument les mêmes que dans le *C. vitalba* (fig. 100).

Histologie. — Le tissu fondamental externe est collenchymateux sur toute la circonférence de la tige; il l'est toutefois beaucoup plus sous les côtes que dans les sillons.

La gaine de sclérenchyme est formée de massifs de fibres extérieures au liber reliés entre eux par des cellules sclérifiées interfasciculaires que l'on reconnait à leur diamètre plus grand et aux méats qu'elles laissent entre elles (fig. 101). Les rayons médullaires sont sclérifiés.

CHAPITRE II.

Clematis viticella L.

§ 1. LES PLANTULES.

Des graines d'une même provenance ont été semées dans un pot en mars 1893. Quelques-unes ont germé après quelques mois; les autres seulement après un an. Deux plantules ont été étudiées : l'une, A (fig. 102), choisie parmi les germinations tardives, l'autre, B, parmi les germinations hâtives.

L'individu A semble avoir pris, au sein de l'albumen, un grand développement avant de sortir de la graine : il montre, en effet, six faisceaux dans l'entre-nœud [1] et trois faisceaux à chaque feuille de la première paire. L'individu B semble avoir pris, au contraire, un développement moins grand avant de sortir : il contient seulement quatre faisceaux dans l'entre-nœud [1] et un faisceau pour chaque feuille de la première paire. Il est à remarquer que dans le *C. viticella* les cotylédons sont hypogés. L'utilisation de l'albumen a pu se faire presque entièrement avant la sortie et la différenciation de l'embryon pour l'individu A, tandis qu'elle a pu se faire, en majeure partie, après la sortie de l'embryon et sa différenciation pour l'individu B. En d'autres termes, A aurait utilisé presque toutes les réserves de l'albumen avant de se différencier, comme dans le cas d'une graine exalbuminée, et B se serait différencié avant d'avoir absorbé tout l'albumen.

1. Axe hypocotylé. — Il ne mesure qu'un millimètre de longueur (fig. 102).

Histologie comme dans le *C. integrifolia*. Rien de particulier dans la région du contact.

2. Cotylédons hypogés. — Chaque cotylédon reçoit trois faisceaux (L, M, L) comme dans le *C. integrifolia* (voy. la figure 106, qui est le schéma du nœud cotylédonaire de la plantule B).

3. Tige principale. — Quatre, cinq ou six faisceaux. Une couche subéreuse à l'extérieur du liber mou. Rayons médullaires sclérifiés.

4. Feuilles. — Celles des deux premières paires sont très petites, plus ou moins cachées sous le sol. Les autres sont ovales-lancéolées, entières.

Histologie comme dans le *C. vitalba.*

Les figures 103 et 105 montrent respectivement le parcours dans la tige principale des plantules A et B.

5. Racine principale. — Comme dans le *C. integrifolia.*

PLANTULE ANOMALE.

Dans une autre plantule, les cotylédons et les feuilles étaient verticillés par [3] (fig. 107).

1. Axe hypocotylé. — Faisceau tripolaire.

2. Cotylédons. — Chacun des trois cotylédons reçoit un faisceau médian formé par la réunion de deux branches, et deux faisceaux latéraux comme dans les plantules normales (fig. 108 à comparer à la fig. 106 ; voyez aussi fig. 109). Les pôles ligneux centripètes de la racine sont entraînés avec le faisceau médian dans le pétiole du cotylédon.

3. Tige principale. — La figure 109 représente le parcours des faisceaux dans la tige et leur sortie dans les feuilles.

4. Feuilles. — Elles sont courtes à tous les nœuds ; celles du deuxième nœud sont inégales. Comme les cotylédons, les feuilles reçoivent trois faisceaux. Dans chaque feuille, trois nervures seulement. Mésophylle homogène ; quelques cellules collenchymateuses autour des faisceaux.

5. Racine principale. — Faisceau tripolaire.

§ 2. TIGE DE LA PLANTE ADULTE.

La tige du *C. viticella* est identique à celle du *C. integrifolia* au point de vue du nombre et du parcours des faisceaux, ainsi qu'au point de vue de l'histologie. On remarque seulement que le collenchyme est très peu abondant dans les sillons.

CHAPITRE III.

Clematis flammula L.

§ 1. LES PLANTULES.

1. Axe hypocotylé. — Il mesure 4 à 5 millimètres de longueur (fig. 110). Histologie comme dans le *C. integrifolia*. La région du contact ne présente rien de particulier; nous représentons toutefois (fig. 114) une coupe très démonstrative faite à la base du nœud cotylédonaire : elle peut facilement être comparée à celle pratiquée au même endroit dans le *C. vitalba* (fig. 18).

2. Cotylédons. — Ordinairement épigés, les cotylédons restent parfois emprisonnés dans le spermoderme et sont alors hypogés.

Le pétiole cotylédonaire est long de près de 1 centimètre; le limbe, de 5 millimètres. Chaque cotylédon ne reçoit qu'un seul faisceau formé par la réunion de deux branches qui entraînent avec elles les trachées du bois centripète de l'axe hypocotylé. Cette organisation est identique à celle du *C. vitalba*.

Le limbe est parcouru par trois nervures. Histologie comme dans le *C. vitalba*.

3. Tige principale. — Les entre-nœuds sont longs, grêles et rigides. Quatre faisceaux. Histologie comme dans les espèces précédentes.

La figure 111 montre le parcours des faisceaux dans la tige principale et leur sortie dans les feuilles.

4. Feuilles. — Les feuilles de la première paire sont écailleuses; elles ne reçoivent qu'un faisceau. Les feuilles suivantes, ovales, entières, sont également développées et insérées au même niveau; elles reçoivent trois faisceaux. Histologie comme dans le *C. vitalba*.

5. Racine principale. — Faisceau bipolaire.

§ 2. TIGE DE LA PLANTE ADULTE.

STRUCTURE. — Six gros faisceaux, six moyens et de trois à douze petits (fig. 112). Les six gros seuls sont en rapport avec les feuilles. Les autres, comme les six petits faisceaux des espèces précédentes, apparaissent plus ou moins tardivement et se rattachent aux faisceaux réparateurs (fig. 113). Histologie comme dans le *C. integrifolia* et le *C. viticella.*

Remarque. La tige du *C. heraclœefolia* que je n'ai pu étudier qu'à l'état adulte est identique à celle du *C. flammula.*

CHAPITRE IV.

Clematis recta L.

§ 1. LES PLANTULES.

Extérieurement, les plantules du *C. recta* sont à peu près identiques à celles du *C. flammula.*

1. Axe hypocotylé. — Long d'environ 2 millimètres, il ne présente rien de particulier au point de vue de l'histologie, ni dans la région du contact.

2. Cotylédons. — Les cotylédons des deux plantules étudiées étaient emprisonnés dans le spermoderme et hypogés (1). Ils reçoivent un seul faisceau formé de deux branches et présentent la même structure que ceux du *C. vitalba.*

3. Tige principale. — Parcours et histologie comme dans le *C. flammula.*

4. Feuilles. — Comme dans le *C. flammula.*

5. Racine principale. — Faisceau bipolaire.

(1) M. Lubbock, dans son ouvrage sur la vie des plantes, décrit les cotylédons du *C. recta* comme hypogés. Irmisch (*Zur Naturgeschichte von* Melitis Melissophylum [Bot. Zeitung, 6. August 1858]) a observé que les cotylédons épais et ordinairement épigés du *C. recta* et du *C. corymbosa* restent parfois sous terre.

§ 2. TIGE DE LA PLANTE ADULTE.

Structure. — Ressemble beaucoup à celle du *C. flammula*. Vingt-deux faisceaux : six gros, quatre moyens et douze petits. Les six gros seuls sont en rapport avec les feuilles. Les faisceaux moyens se trouvent à droite et à gauche du faisceau médian de chaque feuille (fig. 115).

CHAPITRE V.

Atragene alpina L.

§ 1. LES PLANTULES.

1. Axe hypocotylé. — Des coupes successives dans sa partie supérieure confirment ce qui a été constaté dans les espèces précédentes. Histologie comme dans la racine principale (voir plus loin).

2. Cotylédons épigés. — Leur pétiole mesure 10 millimètres et leur limbe 15 millimètres. Chaque cotylédon ne reçoit qu'un seul faisceau qui, dans le pétiole, se divise en trois, puis en cinq faisceaux par suite de deux trifurcations successives. Histologie comme dans le *C. vitalba*.

3. Tige principale. — Elle reste très courte durant la première année et se termine, à la fin de l'été, par un bourgeon protégé par des feuilles pérulaires (fig. 118). Le parcours des faisceaux est représenté par la figure 120. On remarquera qu'il y a quatre faisceaux réparateurs (A, B, C, D) très apparents, et que les faisceaux foliaires (médians et latéraux) se détachent à droite et à gauche de ces réparateurs.

4. Feuilles. — Les feuilles des deux premières paires sont inégalement développées. Au premier nœud, la feuille la plus ancienne (fe^1) est un peu plus petite et simplement crénelée; l'autre (fe^1) est trilobée (fig. 118). Les feuilles du deuxième nœud sont trilobées (fig. 116). A partir du troisième nœud, les feuilles de chaque paire sont égales et trifoliolées. Les feuilles pérulaires du bourgeon terminal ont un limbe rudimentaire, poilu; la portion inférieure est longue et élargie (fig. 119).

L'étude du parcours et de la vernation, dans des plantules suffisamment jeunes, démontre que les feuilles de chaque paire naissent à des niveaux différents et qu'à chaque nœud les feuilles les plus anciennes (*fe* [1], [2], [3], [4]) sont toutes rejetées d'un côté et les feuilles les plus jeunes (*fe* [I], [II], [III], [IV]), de l'autre. Il en résulte que les premiers appendices de la tige principale sont disposés dans un ordre distique presque régulier (fig. 117). Ce n'est qu'à partir du cinquième ou sixième nœud que les feuilles s'attachent au même niveau et sont distinctement opposées-décussées. Comme le *C. vitalba*, l'*Atragene alpina* dérive d'ancêtres à feuilles alternes.

Rien de particulier au point de vue histologique.

5. Racine principale. — Faisceau bipolaire; endoderme recloisonné radialement; parenchyme cortical mortifié (fig. 121). Des deux couches de cellules que le péricycle présente en face des pôles ligneux, l'interne est destinée à compléter la zone génératrice circulaire en formant deux arcs interlibériens; ceux-ci fonctionnent, non comme un cambium, ainsi que cela a lieu chez le *C. vitalba* (fig. 28 et 39, pl. XVIII et XIX), mais comme du cambiforme, c'est-à-dire qu'ils donnent naissance à du tissu fondamental secondaire interne et à du tissu fondamental secondaire externe, tous deux formés de cellules à parois minces (fig. 121).

Dans les racines âgées, il se forme un suber exfoliateur à l'extérieur du liber.

§ 2. TIGE DE LA PLANTE ADULTE.

La tige étudiée mesurait 33 centimètres de long et présentait neuf nœuds visibles extérieurement. A sa base (fig. 122), on distinguait trois paires de feuilles pérulaires petites, ovales. Une coupe transversale dans un bourgeon non encore développé montre ces trois paires de pérules en même temps que trois paires de jeunes feuilles et la tige au stade méristématique (fig. 123). Sur une coupe transversale dans une feuille pérulaire (fig. 124), on voit, outre le faisceau, un parenchyme composé de cellules à parois très épaisses et un épiderme à cellules aplaties à parois également épaissies (exemple remarquable d'adaptation de la feuille à la fonction purement protectrice des pérules).

Parcours. — Les deux faisceaux que la tige reçoit de la tige-mère se trifurquent bientôt comme dans le *C. vitalba* (fig. 125). Entre les six faisceaux ainsi formés, en apparaissent d'autres plus petits, en nombre variable, que l'on ne retrouve plus au-dessus du quatrième nœud.

Des six faisceaux principaux se détachent *latéralement* les foliaires médians et latéraux destinés aux trois premières paires de feuilles, c'est-à-dire aux feuilles pérulaires. A partir du quatrième segment, au contraire, les entre-nœuds contiennent six gros faisceaux qui, en se ramifiant dans les nœuds, donnent naissance aux foliaires : le parcours est dès lors identique à celui du *C. vitalba*.

Histologie. — Sur une coupe transversale dans une tige d'un an, on voit (fig. 126 et 127) autour d'une grande lacune centrale :

1° Les restes du tissu fondamental primaire interne;

2° Le bois primaire et le bois secondaire;

3° Le tissu fondamental interfasciculaire non sclérifié; en d'autres termes, les rayons médullaires sont parenchymateux;

4° Une zone génératrice continue fonctionnant en certains points comme cambium, en d'autres comme cambiforme;

5° Contre le liber, un suber exfoliateur;

6° Une gaine de sclérenchyme constituée par des fibres sans méats en face des faisceaux et par des fibres un peu plus larges avec méats dans l'intervalle entre les faisceaux;

7° Le tissu fondamental primaire externe avec collenchyme sous les côtes.

Dans une tige plus âgée, le liber primaire est écrasé; le suber exfolie la gaine de sclérenchyme en même temps que le tissu fondamental externe mortifié.

RÉSUMÉ DE LA SECONDE PARTIE.

I. Clematis integrifolia L.

Plantules. — Dans la racine, l'endoderme, mieux caractérisé que dans le *C. vitalba*, montre les plissements des membranes radiales. Les cotylédons reçoivent chacun trois faisceaux (LML). Les feuilles de la première paire sont écailleuses et l'entre-nœud 1 presque nul. Le parcours des faisceaux est beaucoup plus simple, plus régulier, que dans les plantules du *C. vitalba*.

Tige de la plante adulte. — Gaine de sclérenchyme formée de portions intrafasciculaires sans méats et de portions interfasciculaires méatiques. Rayons médullaires sclérifiés. Même parcours que dans le *C. vitalba*.

II. Clematis viticella L.

Plantules. — Comme dans le *C. integrifolia*, sauf que les cotylédons sont hypogés.

Dans une des plantules étudiées, les cotylédons et les feuilles sont verticillés par trois. Le faisceau libéro-ligneux de la racine est tripolaire. Tous les appendices reçoivent trois faisceaux et le parcours est régulier.

Tige de la plante adulte. — Comme dans le *C. integrifolia*.

III. Clematis flammula L.

Plantules. — Comme dans les deux espèces précédentes, sauf que l'endoderme de la racine est sans plissements et que les cotylédons ne reçoivent qu'un faisceau.

Tige de la plante adulte. — Comme dans les espèces précédentes, sauf que les faisceaux intercalaires sont plus nombreux : il y en a dix-huit, dont six plus gros que les autres.

IV. **Clematis recta** L.

Plantules. — Comme dans le *C. flammula.*

Tige de la plante adulte. — Vingt-deux faisceaux : six gros, quatre moyens et douze petits.

V. **Atragene alpina** L.

Plantules. — Les cotylédons ne reçoivent qu'un faisceau. La tige principale est très courte. Comme dans le *C. vitalba,* les feuilles des premières paires sont de grandeur différente et ne s'insèrent pas au même niveau. Les *fe* ^{1}, ^{2}, ^{3},... sont rejetées d'un côté; les *fe* ^{I}, ^{II}, ^{III},... de l'autre, disposition qui se rapproche de la disposition distique et démontre que l'*Atragene alpina,* comme le *C. vitalba,* dérive d'ancêtres à feuilles alternes.

Dans la racine principale et l'axe hypocotylé, il existe un cambiforme qui se différencie en tissu fondamental secondaire interne et en tissu fondamental secondaire externe.

Tige de la plante adulte. — Six faisceaux ayant le même parcours que les six gros faisceaux du *C. vitalba.* Gaine de sclérenchyme; rayons médullaires parenchymateux.

L'adaptation à la vie alpine se manifeste par la transformation de certaines feuilles en écailles pérulaires qui protègent, pendant l'hiver, le bourgeon terminal de la tige principale et tous les bourgeons de la plante adulte.

ABRÉVIATIONS.

A. h.	Axe hypocotylé.
Ass. pil.	Assise pilifère.
B^1.	Bois primaire.
B^2.	Bois secondaire.
Bg.	Bourgeon.
Cb.	Cambium.
Cbf	Cambiforme.
Coll.	Collenchyme.
cot.	Cotylédon antérieur.
COT.	Cotylédon postérieur.
Cf.	Coiffe.
End.	Endoderme.
Ép.	Épiderme.
ext.	externe.
faisc. cot.	Faisceau cotylédonaire.
Fe.	Feuille.
int.	interne.
L.	Faisceau latéral.
L^1.	Liber primaire.
L^2.	Liber secondaire.
M.	Faisceau médian.
m.	Faisceau marginal.
M. p.	Méristème primitif.
n.	Nœud.
O.	Faisceau opposé.
Par. amyl.	Parenchyme amylifère
Par. cort.	Parenchyme cortical.
Pér.	Pérule.
Péric.	Péricycle.
Rc.	Racine.
R. p.	Racine principale.
Scl	Sclérenchyme.
Sub.	Suber.
t^1.	Trachée initiale.
t. C.	Trachée du faisceau cotylédonaire.
Tf^{2e}.	Tissu fondamental secondaire externe.
Tf^{2i}.	Tissu fondamental secondaire interne.
Tg.	Tige.
t. R.	Trachée du faisceau de la racine.

PLANCHES.

PLANCHE XV.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XV.

CLEMATIS VITALBA L.

Embryon dans la graine.

Fig. 1. — Milieu de l'axe hypocotylé (p. 5).

Fig. 2. — Base des cotylédons et méristème de la tige (p. 6).

Fig. 3. — Coupe longitudinale de l'embryon suivant le plan principal de symétrie (p. 6).

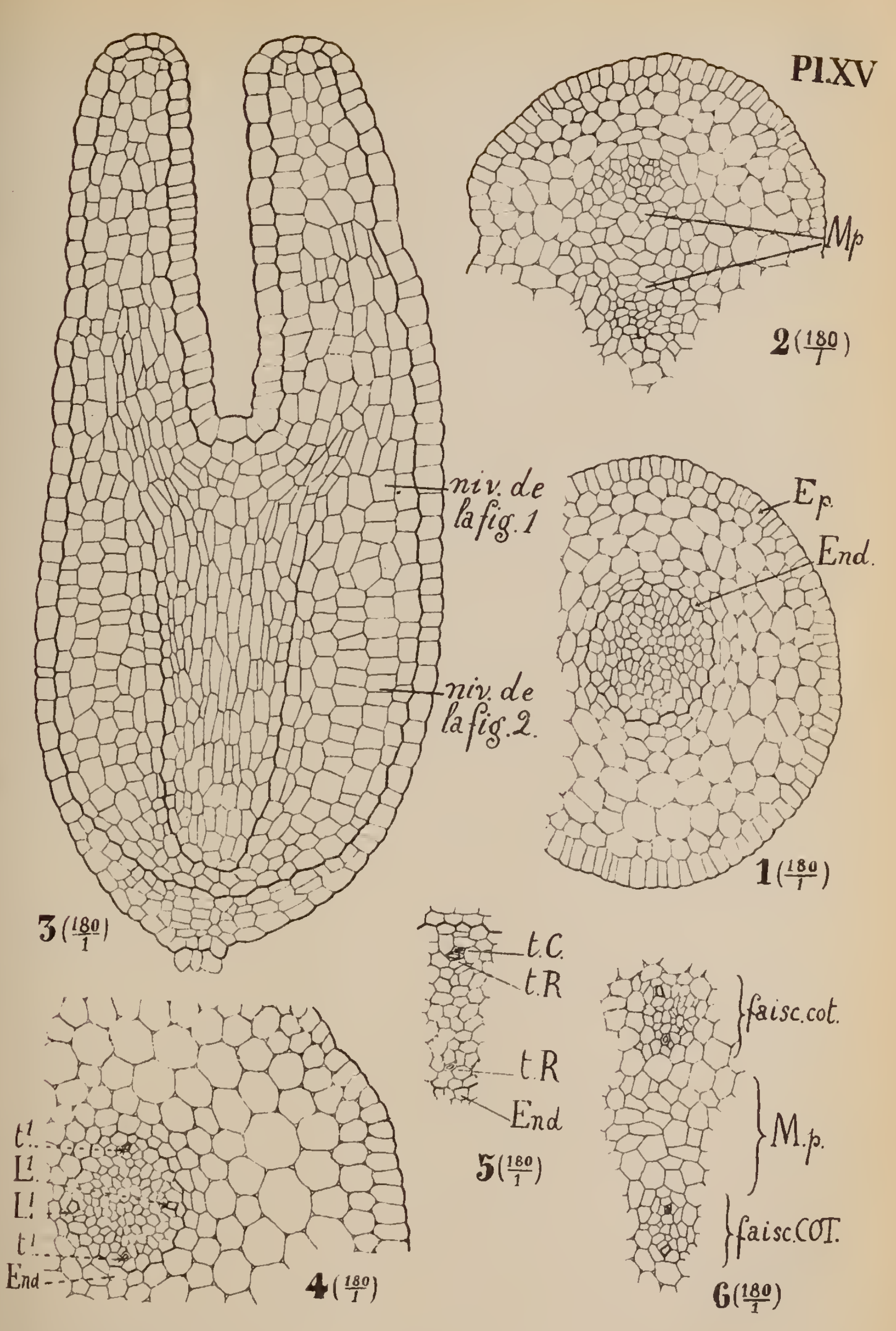
Stade I de la germination.

Fig. 4. — Milieu de l'axe hypocotylé : différenciation des pôles libériens et des pôles ligneux (p. 7).

Fig. 5. — Région d'insertion des cotylédons du même : au pôle antérieur, contact de la trachée initiale du faisceau cotylédonaire (*t.* C.) avec la trachée initiale du faisceau de l'axe hypocotylé *t.* R. (p. 7).

Fig. 6. — Coupe du même à la base des cotylédons : différenciation libéro-ligneuse des faisceaux cotylédonaires à bois centrifuge (p. 7).

Pl. XV



C. VITALBA. Fig. 1 à 3: Embryon dans la graine.
Fig. 4 à 6: Stade I de la germination.

R. Sterckx ad. nat. del.



PLANCHE XVI.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XVI.

CLEMATIS VITALBA L.

Stade I (suite).

Fig. 7. — Coupe vers le milieu d'un cotylédon (p. 7).

Stade II.

Fig. 8. — Plantule au deuxième stade de la germination (p. 8).

Fig. 9. — Milieu de l'axe hypocotylé (p. 8).

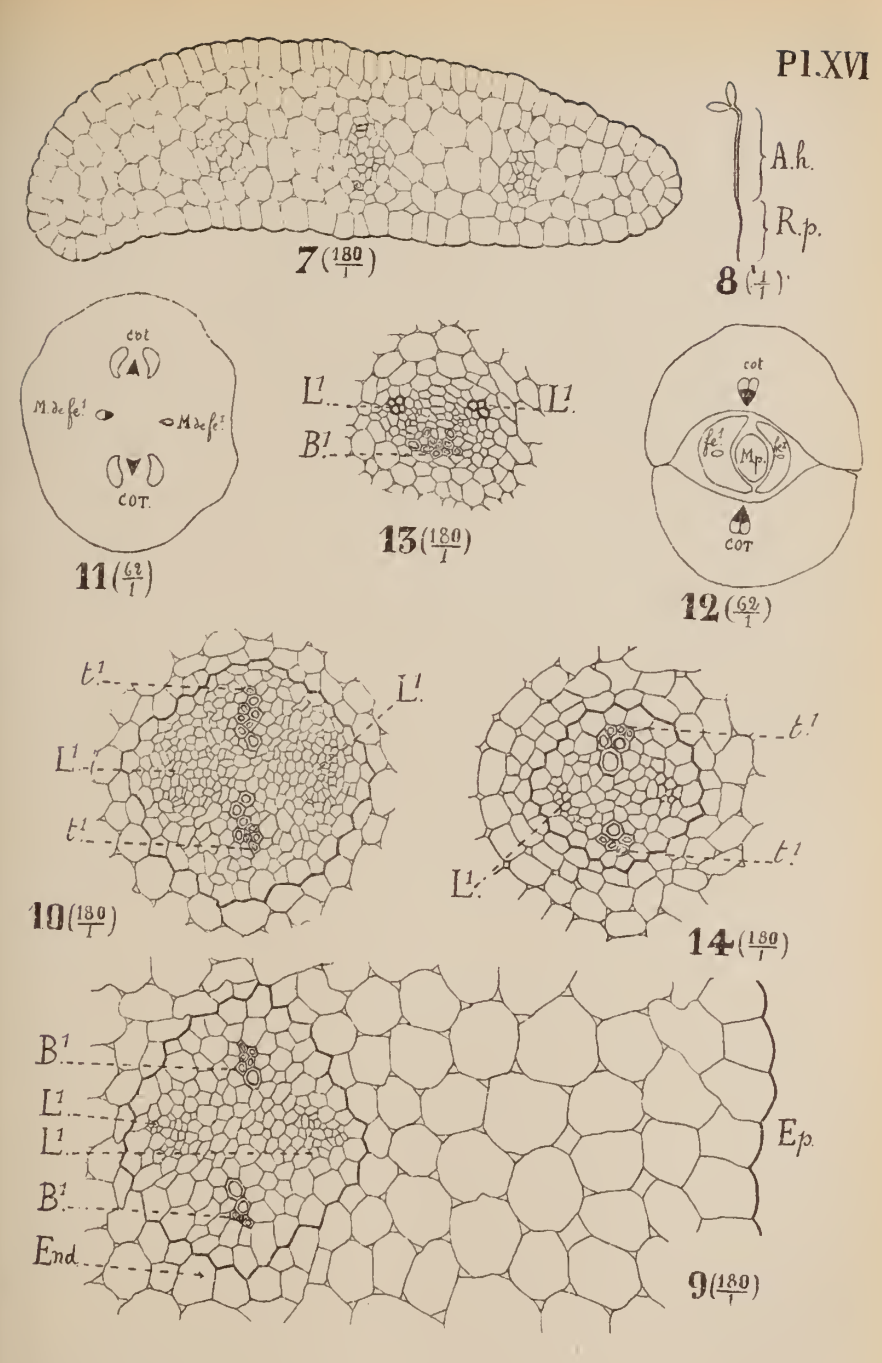
Fig. 10. — Région supérieure du même (p. 8).

Fig. 11. — Nœud cotylédonaire du même (p. 9).

Fig. 12. — Bourgeon terminal du même (p. 9).

Fig. 13. — Faisceau de l'un des cotylédons de la coupe précédente grossi davantage (p. 9).

Fig. 14. — Racine principale (p. 9).



C. VITALBA. Fig 7: Stade I (suite)

Fig. 8 à 14: Stade II

R. Sterckx ad. nat. del.



PLANCHE XVII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XVII.

CLEMATIS VITALBA L.

Stade III.

Fig. 15. — Plantule au troisième stade de la germination (p. 10).

Fig. 16. — Milieu de l'axe hypocotylé (p. 10).

Fig. 17. — Contact des faisceaux médians (à bois centrifuge) de la *fe* [1] et de la *fe* [1] avec le faisceau (à bois centripète) de l'axe hypocotylé (p. 10).

Fig. 18. — Contact des faisceaux cotylédonaires avec les pôles ligneux de l'axe hypocotylé (p. 10).

Fig. 19. — Ensemble au niveau de la sortie des faisceaux cotylédonaires (p. 11).

Fig. 20. — Ensemble au niveau du bourgeon terminal (p. 11).

Fig. 21. — Spire phyllotaxique passant par *cot.*, *fe* [1], *fe* [2] (p. 11).

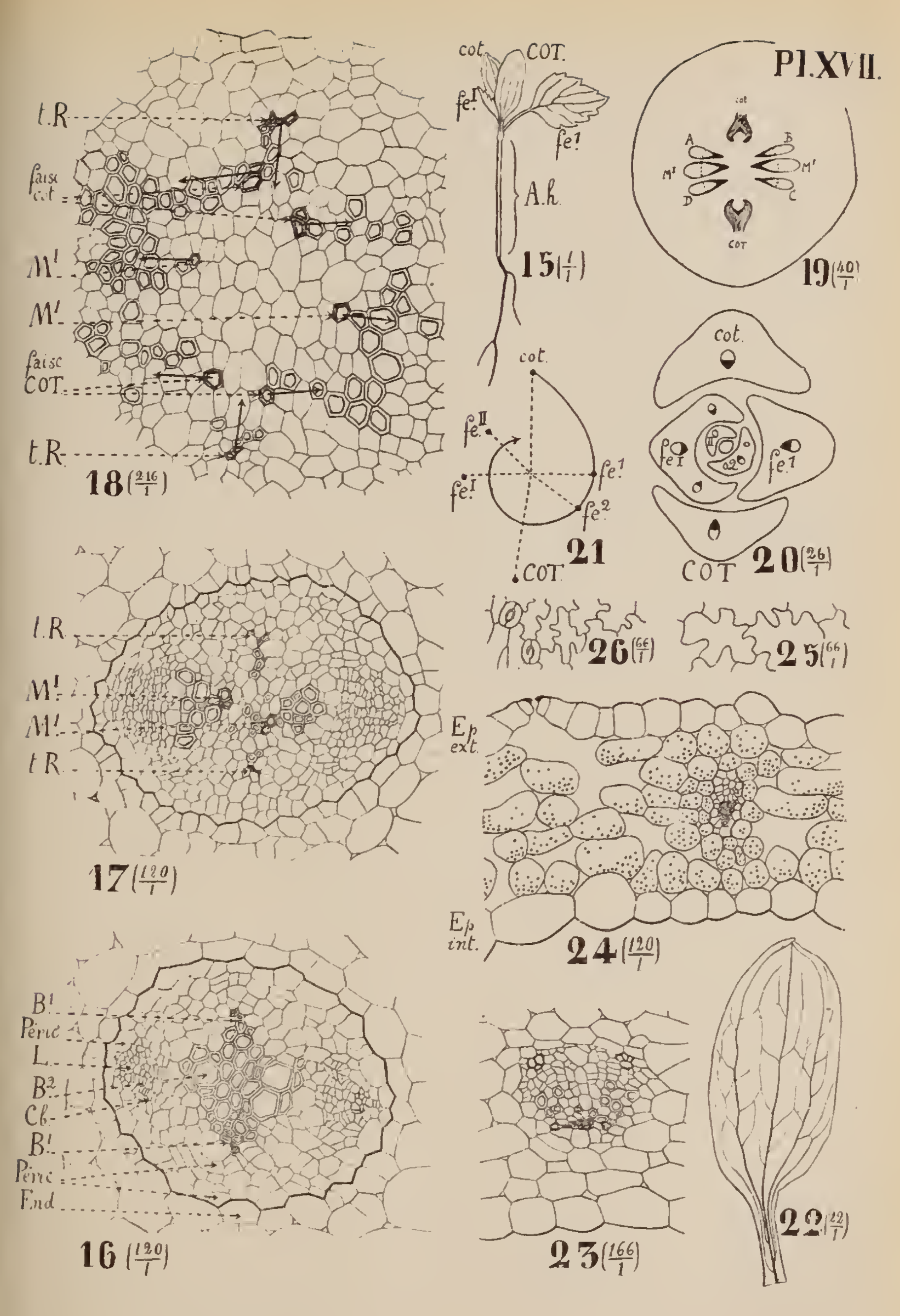
Fig. 22. — Cotylédon de la plantule de la figure 15 (p. 12).

Fig. 23. — Faisceau dans la région inférieure d'un pétiole cotylédonaire : bois centripète écrasé contre le bois centrifuge. Ce faisceau provient de la fusion de deux faisceaux dont les pôles libériens sont encore bien apparents (p. 12).

Fig. 24. — Milieu du limbe cotylédonaire (p. 12).

Fig. 25. — Épiderme interne (supérieur) du limbe cotylédonaire (p. 12).

Fig. 26. — Épiderme externe (inférieur) du même (p. 12).



C. VITALBA. Stade III

R Sterckx ad nat del.



PLANCHE XVIII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XVIII.

CLEMATIS VITALBA L.

Stade IV.

Fig. 27. — Plantule au quatrième stade de la germination (p. 13).

Fig. 28. — Milieu de l'axe hypocotylé (p. 13).

Fig. 29. — Base du nœud cotylédonaire du même (p. 14).

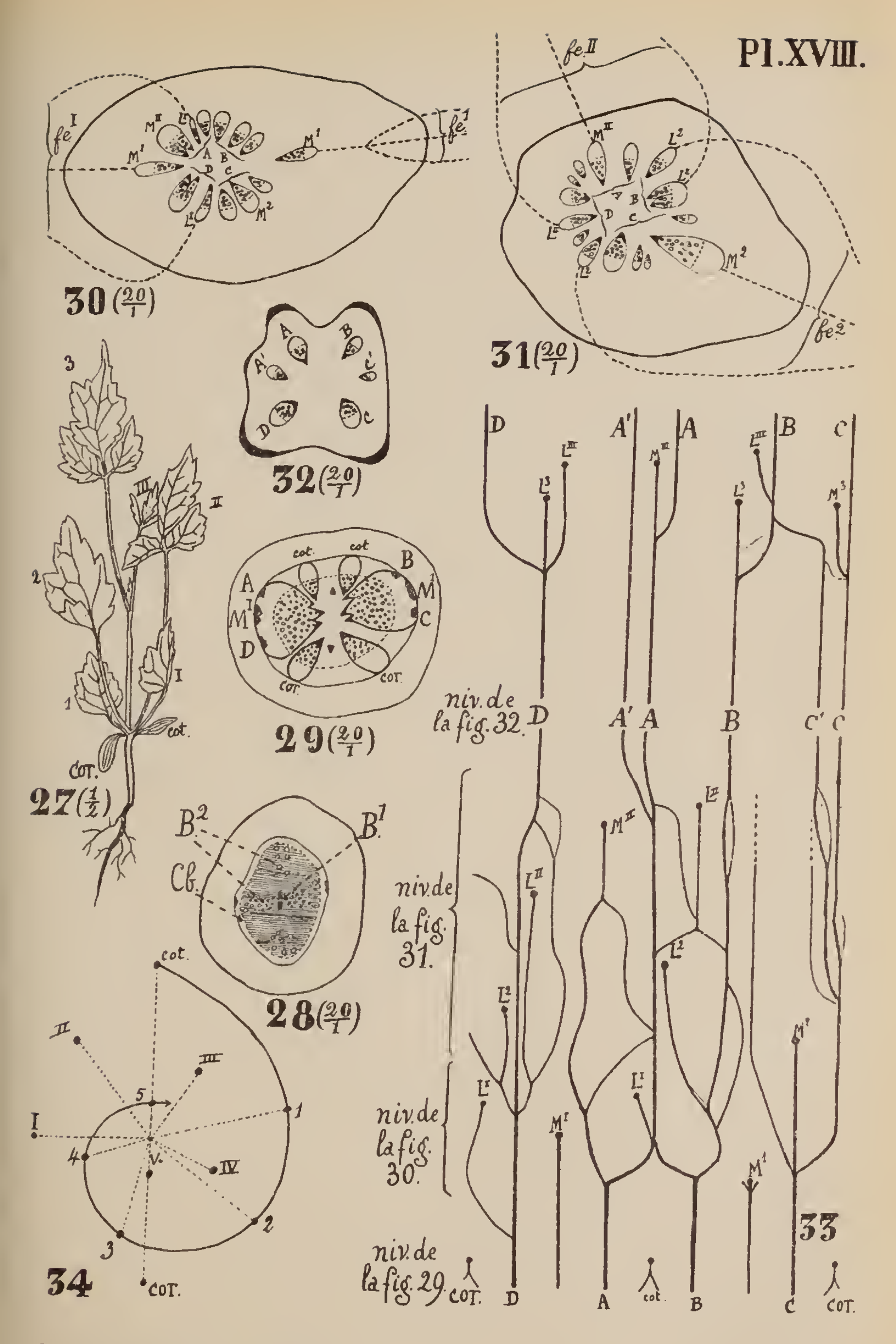
Fig. 30. — Projection du premier nœud (fe^{1} et fe^{I}) (p. 14).

Fig. 31. — Projection du deuxième nœud (fe^{2} et fe^{II}) (p. 14).

Fig. 32. — Milieu de l'entre-nœud ^{3} (p. 14).

Fig. 33. — Parcours des faisceaux dans la tige de la plantule de la figure 27 (p. 14).

Fig. 34. — Spire phyllotaxique passant par *cot.*, fe^{1}, fe^{2}, fe^{3}, fe^{4}, fe^{5} (p. 14).



C. VITALBA. Stade IV

R. Sterckx ad nat. del.

PLANCHE XIX.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XIX.

CLEMATIS VITALBA L.

Stade IV (suite).

Fig. 35. — Portion de la coupe au milieu de l'axe hypocotylé (p. 13).

Fig. 36. — Une trachéide au même niveau (p. 13).

Fig. 37. — Faisceau A au milieu du troisième entre-nœud de la tige principale (p. 15).

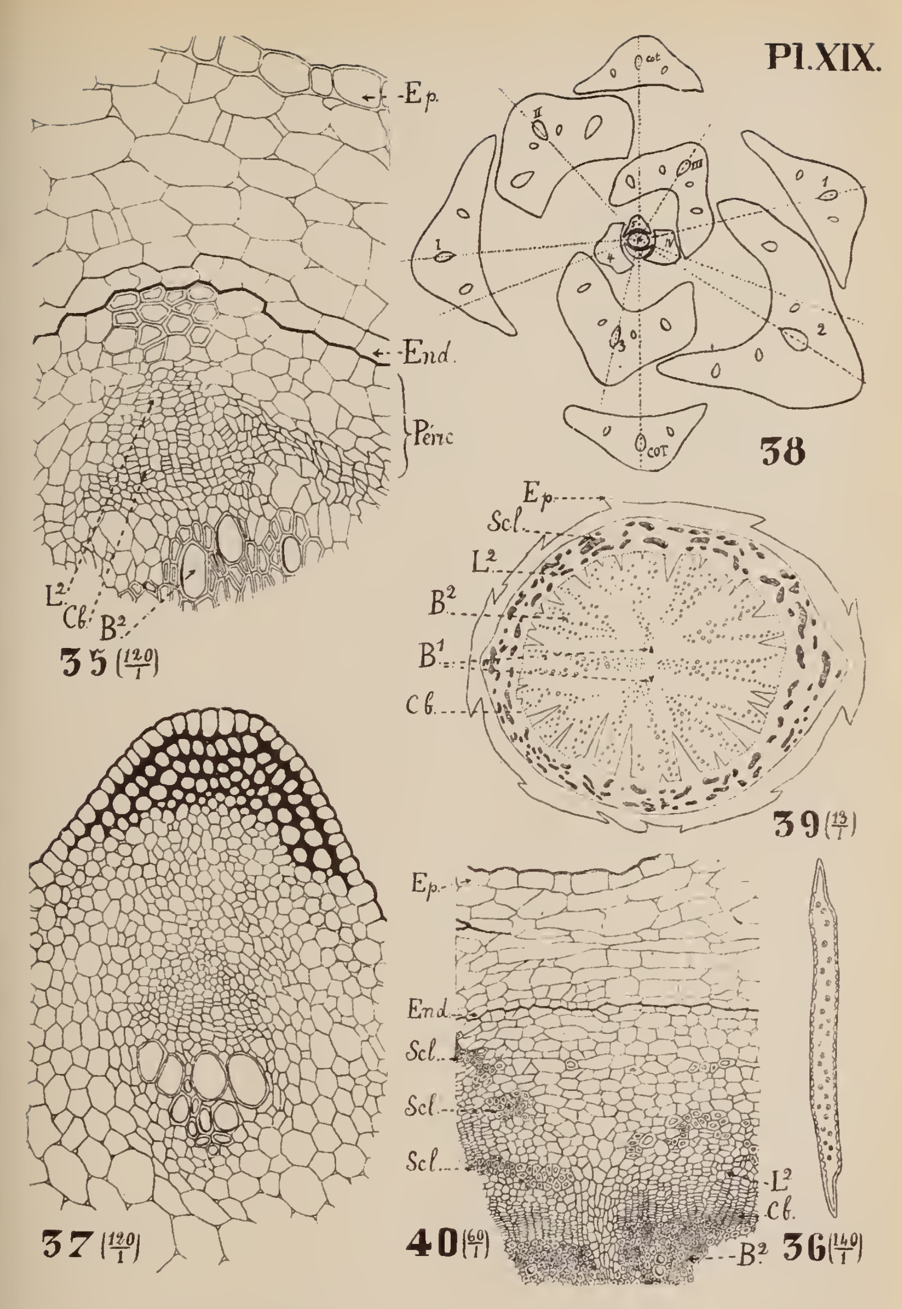
Fig. 38. — Projection des appendices (p. 15).

Stade V.

Fig. 39. — Milieu de l'axe hypocotylé (p. 17).

Fig. 40. — Portion grossie de la coupe précédente (p. 17).

Pl.XIX.



C. VITALBA. Fig. 35 à 38: Stade IV (suite)

Fig. 39 et 40: Stade V

R. Sterckx ad nat. del

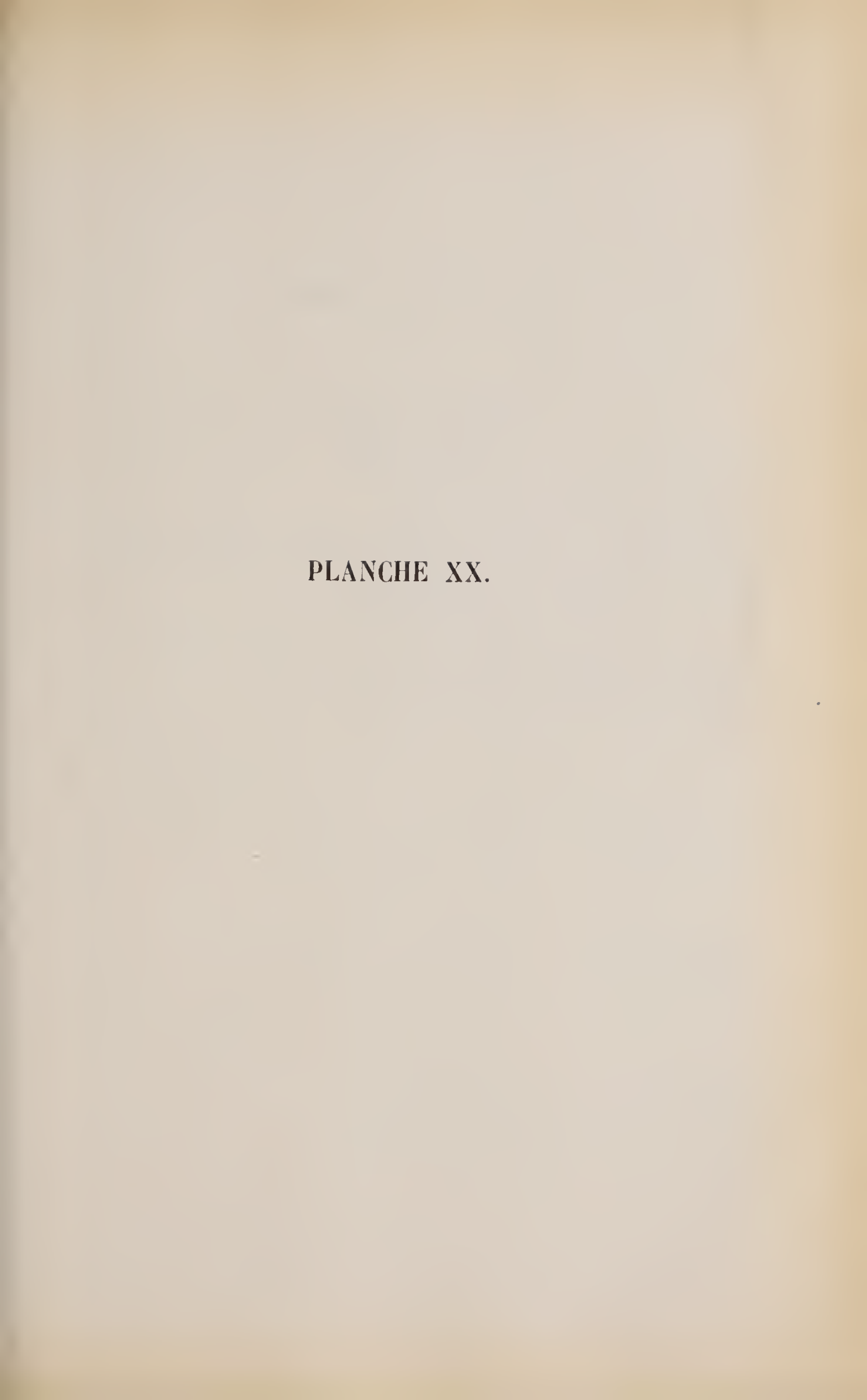


PLANCHE XX.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XX.

CLEMATIS VITALBA L.

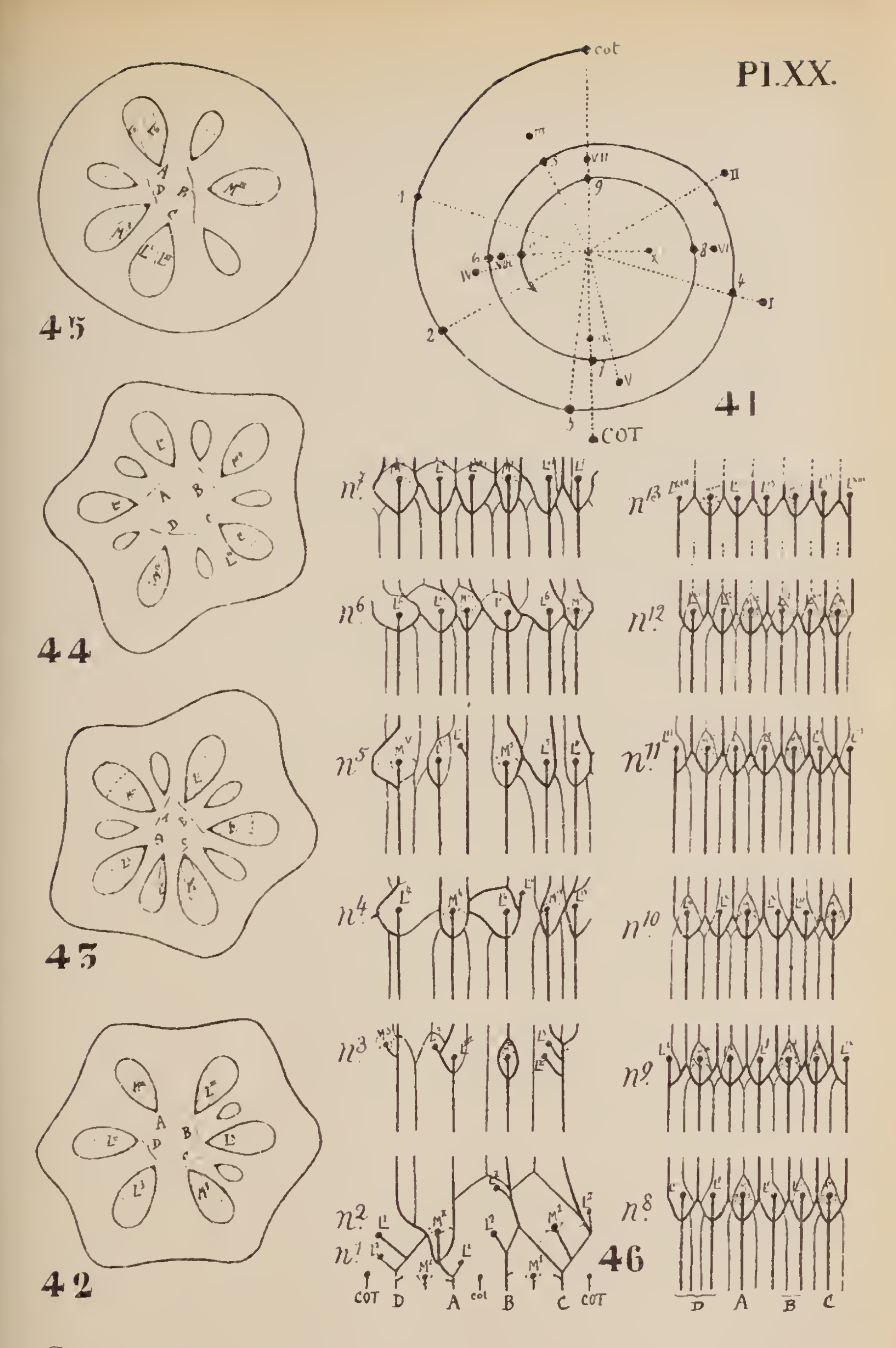
Stade V (suite).

Fig. 41. — Spire phyllotaxique (p. 18).

Fig. 42 à 45. — Divers aspects de coupes pratiquées dans la première région de la tige principale, c'est-à-dire dans les six ou sept premiers segments (p. 19).

Fig. 46. — Parcours des faisceaux dans les treize segments de la tige principale étudiée au stade V (p. 19).

Pl.XX.



C. VITALBA. Stade V (suite).

R Sterckx ad. nat. del.



PLANCHE XXI.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXI.

CLEMATIS VITALBA L.

Stade V (suite).

Fig. 47. — Aspect de la coupe pratiquée dans la deuxième région de la tige principale, c'est-à-dire au delà du septième ou du huitième segment (p. 20).

Fig. 48. — Portion grossie de la coupe précédente (p. 20).

Fig. 49. — Fibres de l'anneau de sclérenchyme de la figure précédente (p. 20).

Fig. 50. — Un faisceau de la deuxième région de la tige principale dans une plantule âgée de trois mois seulement (p. 20).

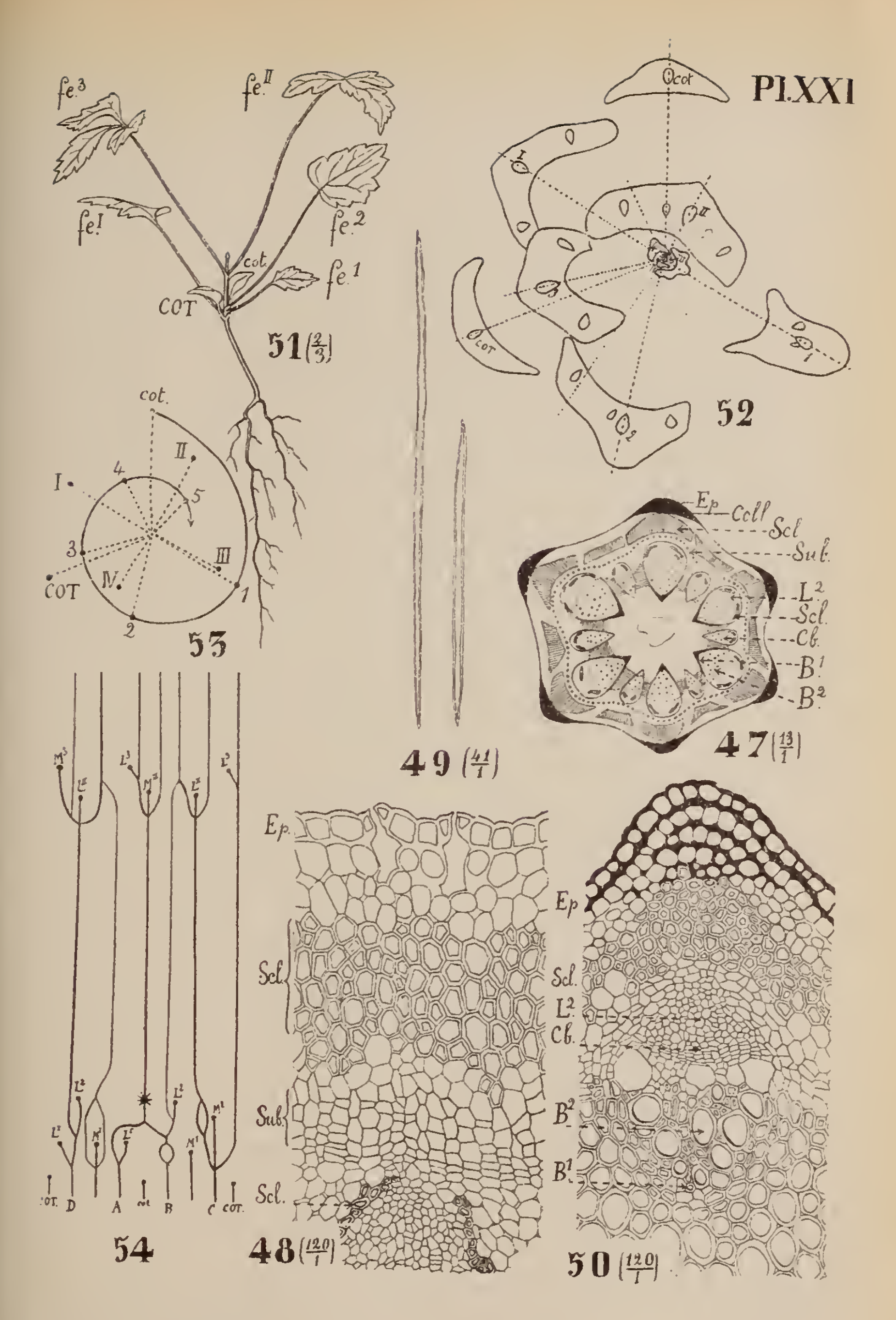
Plantule anomale (p. 21).

Fig. 51. — Aspect de la plantule.

Fig. 52. — Projection des appendices.

Fig. 53. — Spire phyllotaxique.

Fig. 54. — Parcours des faisceaux dans la tige principale.



C. VITALBA. Fig. 47 à 50: Stade V (suite).

Fig. 51 à 54: Plantule anomale.

R. Sterckx ad nat. del.

PLANCHE XXII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXII.

CLEMATIS VITALBA L.

Plante adulte.

Fig. 55 à 60. — Développement des tissus dans le bourgeon terminal de la région à structure constante de la tige (p. 25).

Fig. 55. — Stade méristématique.

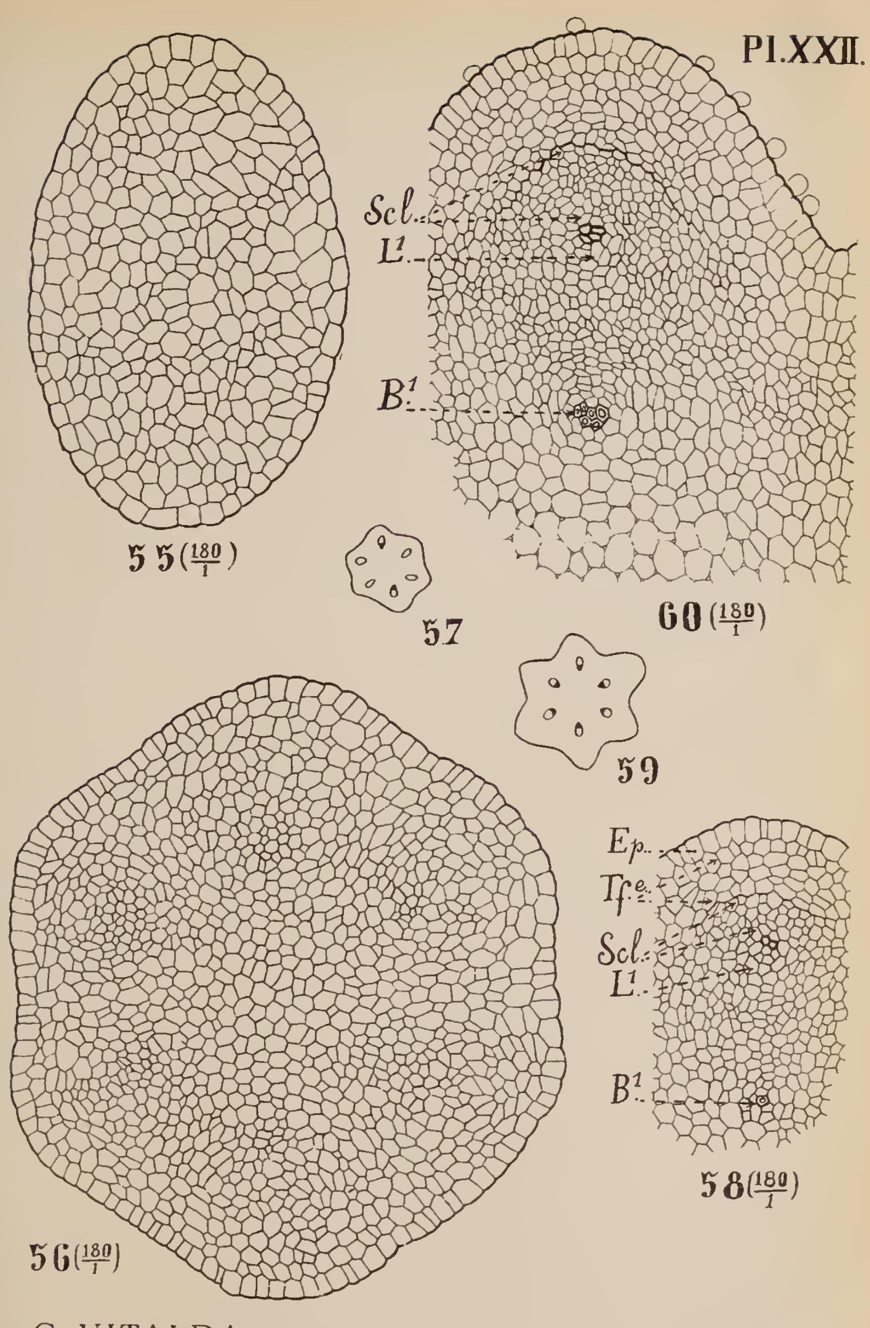
Fig. 56. — Stade procambial.

Fig. 57. — Différenciation des pôles ligneux et libériens.

Fig. 58. — L'un des faisceaux M de la coupe précédente.

Fig. 59. — Stade primaire.

Fig. 60. — L'un des faisceaux M de la coupe précédente.



C. VITALBA.. Plante adulte.
Structure des tiges.

R. Sterckx ad. nat. del.



PLANCHE XXIII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXIII.

CLEMATIS VITALBA L.

Plante adulte.

Fig. 61 à 63. — Suite du développement des tissus dans la région de la tige à structure constante.

Fig. 61. — Stade secondaire (p. 26).

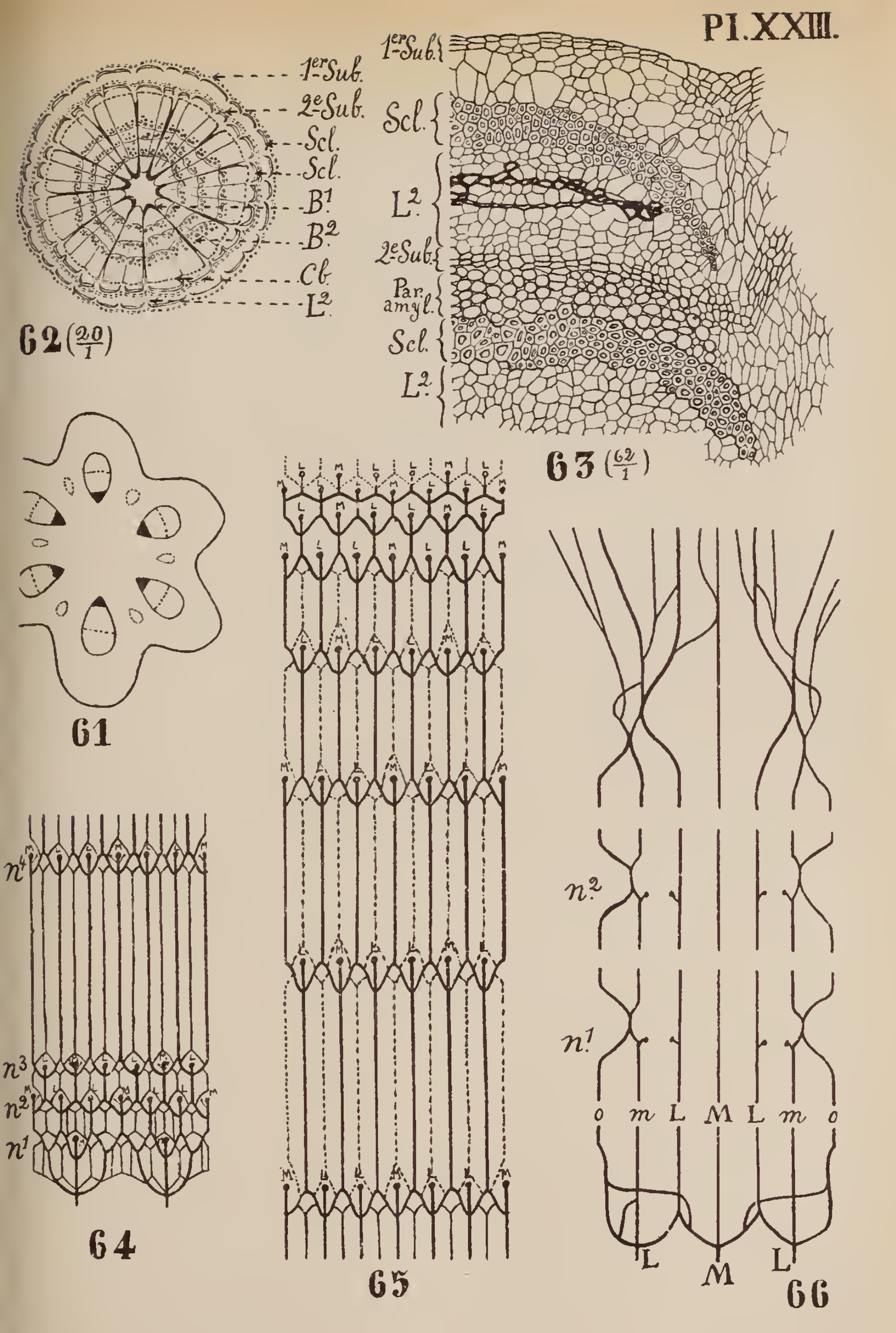
Fig. 62. — Tige âgée de quatre ans (p. 27).

Fig. 63. — Portion périphérique de la coupe précédente (p. 27).

Fig 64. — Parcours des faisceaux dans la région de la tige à structure variable (segments inférieurs) (p. 25).

Fig. 65. — Parcours des faisceaux dans la région à structure constante (p. 27).

Fig. 66. — Parcours des faisceaux dans le pétiole et le rachis primaire d'une feuille (p. 31).



C. VITALBA. Plante adulte.
Structure des tiges.

R. Sterckx ad. nat. del.



PLANCHE XXIV.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXIV.

CLEMATIS VITALBA L.

Feuilles des plantules.

Fig. 67. — Feuille [1] de la tige principale au stade V (p. 22).

Fig. 68. — Feuille [3] de la même (p. 22).

Fig. 69. — Poils de l'épiderme interne (supérieur) de la *fe* [1].

Feuilles de la plante adulte.

Fig. 70. — Région inférieure d'une tige montrant les premières paires de feuilles rapprochées et peu développées; la spire phyllotaxique est senestre (pp. 23 et 30).

Fig. 71 et 72. — *Fe* [1] et *fe* [1] de la tige précédente (p. 30).

Fig. 73. — Région inférieure d'une tige analogue à celle de la figure 70, mais à spire phyllotaxique dextre (pp. 23 et 30).

Fig. 74 et 75. — *Fe* [1] et *fe* [1] de la tige précédente (p. 30).

Fig. 76. — Feuille de la région à structure constante de la tige adulte (p. 30).

Fig. 77. — Milieu de son pétiole (p. 31).

Fig. 78. — Premier nœud du rachis (p. 31).

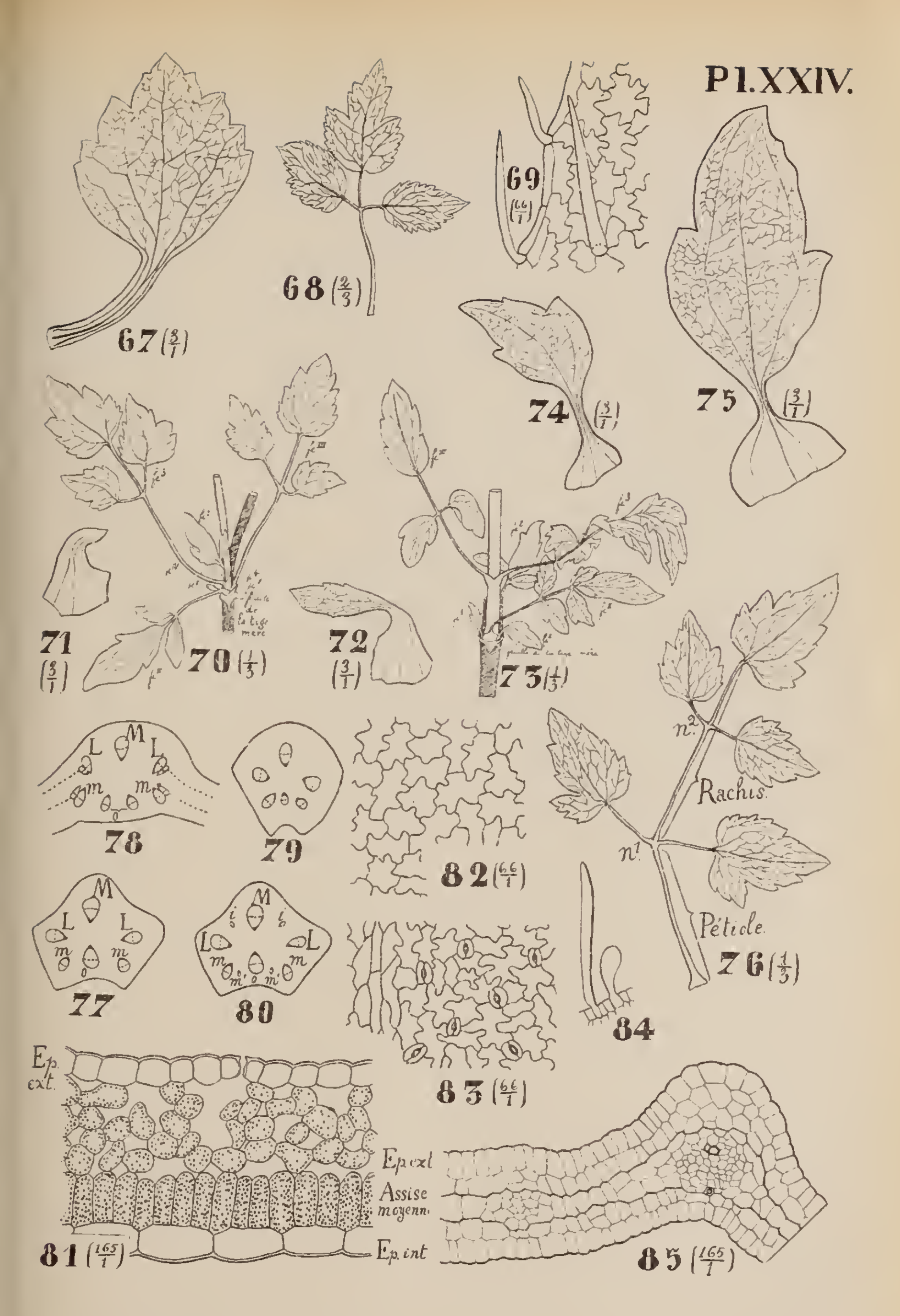
Fig. 79. — Milieu d'un pétiolule (p. 31).

Fig. 80. — Milieu du pétiole d'une feuille exceptionnellement vigoureuse (p. 31).

Fig. 81. — Coupe transversale du limbe de la feuille figure 76 (p. 32).

Fig. 82 à 84. — Épiderme interne (supérieur), épiderme externe (inférieur) et poils du même (p. 32).

Fig. 85. — Coupe transversale du limbe d'une feuille encore jeune : les nervures se forment au sein de l'assise moyenne du mésophylle primitivement formé de trois assises (p. 32) ; à comparer à la figure 81.



C. VITALBA. Feuilles

Fig. 67 à 69: des Plantules.

Fig. 70 à 85: de la plante adulte.

R. Sterckx ad. nat. del.



PLANCHE XXV.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXV.

CLEMATIS VITALBA L.

Racines de la plante adulte.

Fig. 86 à 89. — Développement des tissus au sommet d'une racine (p. 33).

Fig. 86. — Stade procambial.

Fig. 87. — Stade de la différenciation des trois pôles libériens et des trois pôles ligneux.

Fig. 88. — Apparition des zones cambiales dans un faisceau bipolaire.

Fig. 89. — Section longitudinale dans le sommet végétatif d'une racine (p. 33).

Fig. 90 à 92. — Racine d'un an (p. 34).

Fig. 90. — Ensemble de la coupe.

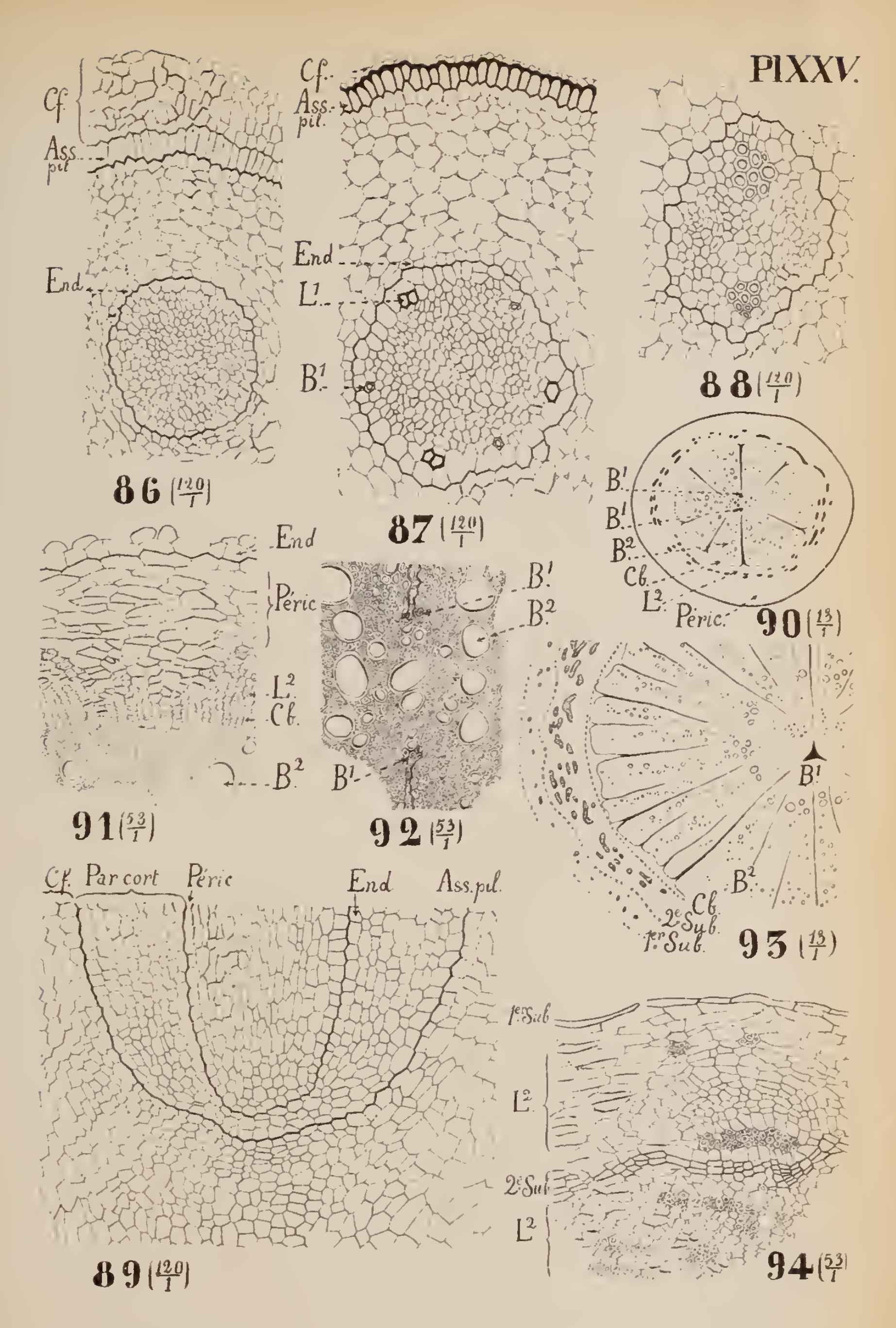
Fig. 91. — Portion périphérique.

Fig. 92. — Portion centrale.

Fig. 93 et 94. — Racine de deux ans (p. 34).

Fig. 93. — Ensemble de la coupe.

Fig. 94. — Portion périphérique.



C. VITALBA. Plante adulte.

Structure des racines.

R. Sterckx ad nat. del.



PLANCHE XXVI.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXVI.

CLEMATIS INTEGRIFOLIA L.

Fig. 95. — Plantule (p. 40).

Fig. 96. — Milieu de l'axe hypocotylé de la plantule précédente (p. 40).

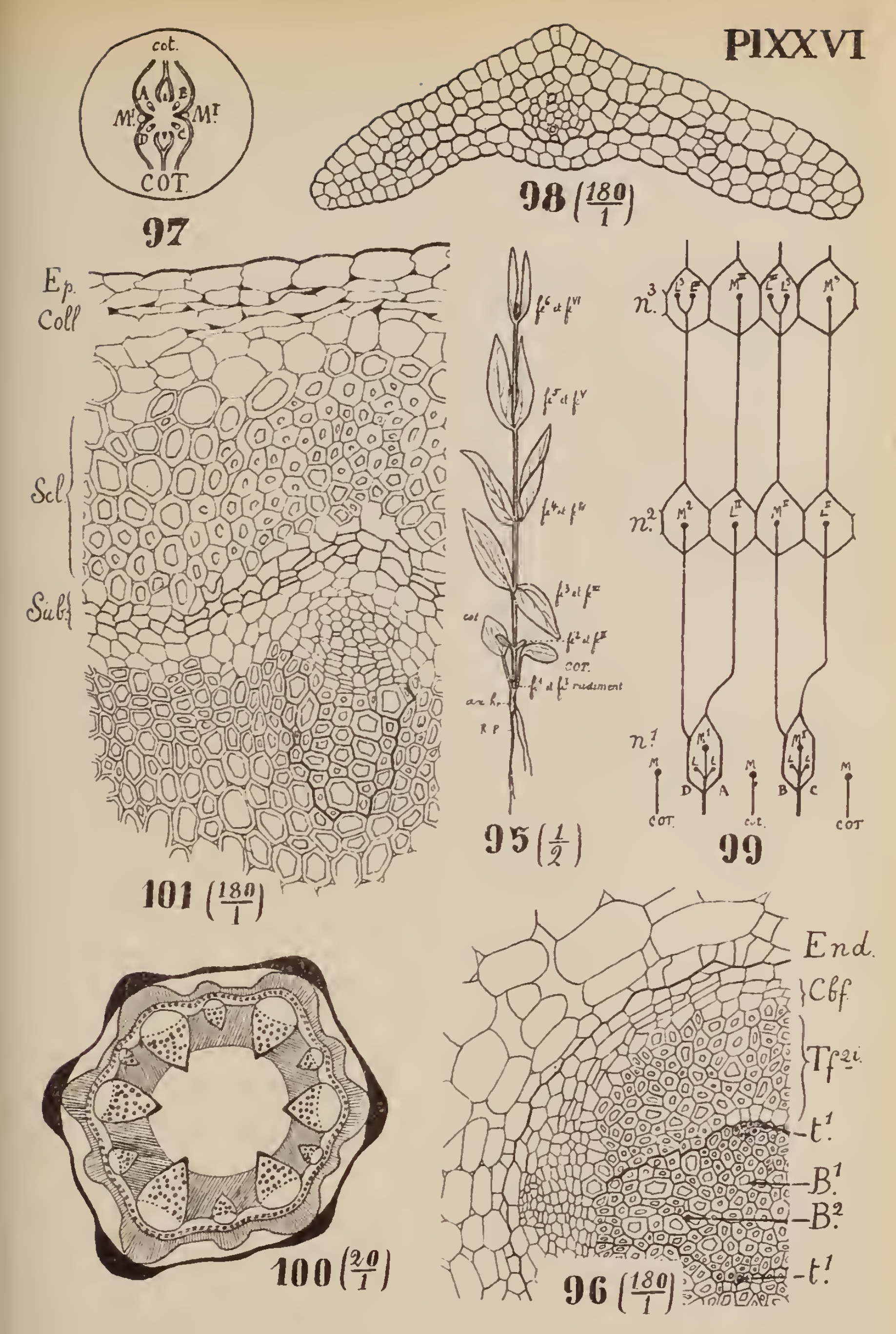
Fig. 97. — Nœud cotylédonaire de la même (p. 40).

Fig. 98. — Section transversale du limbe de la *fe* 2, jeune encore, provenant d'une plantule beaucoup moins âgée que celle de la figure 95 (p. 41).

Fig. 99. — Parcours des faisceaux dans l'axe hypocotylé et la tige principale (pp. 40 et 41).

Fig. 100. — Entre-nœud d'une tige de la plante adulte (p. 42).

Fig. 101. — Portion grossie davantage de la coupe précédente (p. 42).



CLEMATIS INTEGRIFOLIA.

R. Sterckx ad nat. del.

PLANCHE XXVII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXVII.

CLEMATIS VITICELLA L.

Fig. 102. — Plantule A (germination tardive) (p. 43).

Fig. 103. — Parcours des faisceaux dans la tige principale de cette plantule A (p. 44).

Fig. 104. — Schéma du nœud cotylédonaire de la même.

Fig. 105. — Parcours des faisceaux dans la tige principale de la plantule B (germination hâtive) (p. 44).

Fig. 106. — Schéma du nœud cotylédonaire de cette plantule B (p. 43).

Fig. 107. — Plante anomale à trois cotylédons et à feuilles verticillées par trois (p. 44).

Fig. 108. — Schéma du nœud cotylédonaire de la plantule anomale (p. 44).

Fig. 109. — Parcours des faisceaux dans la même (p. 44).

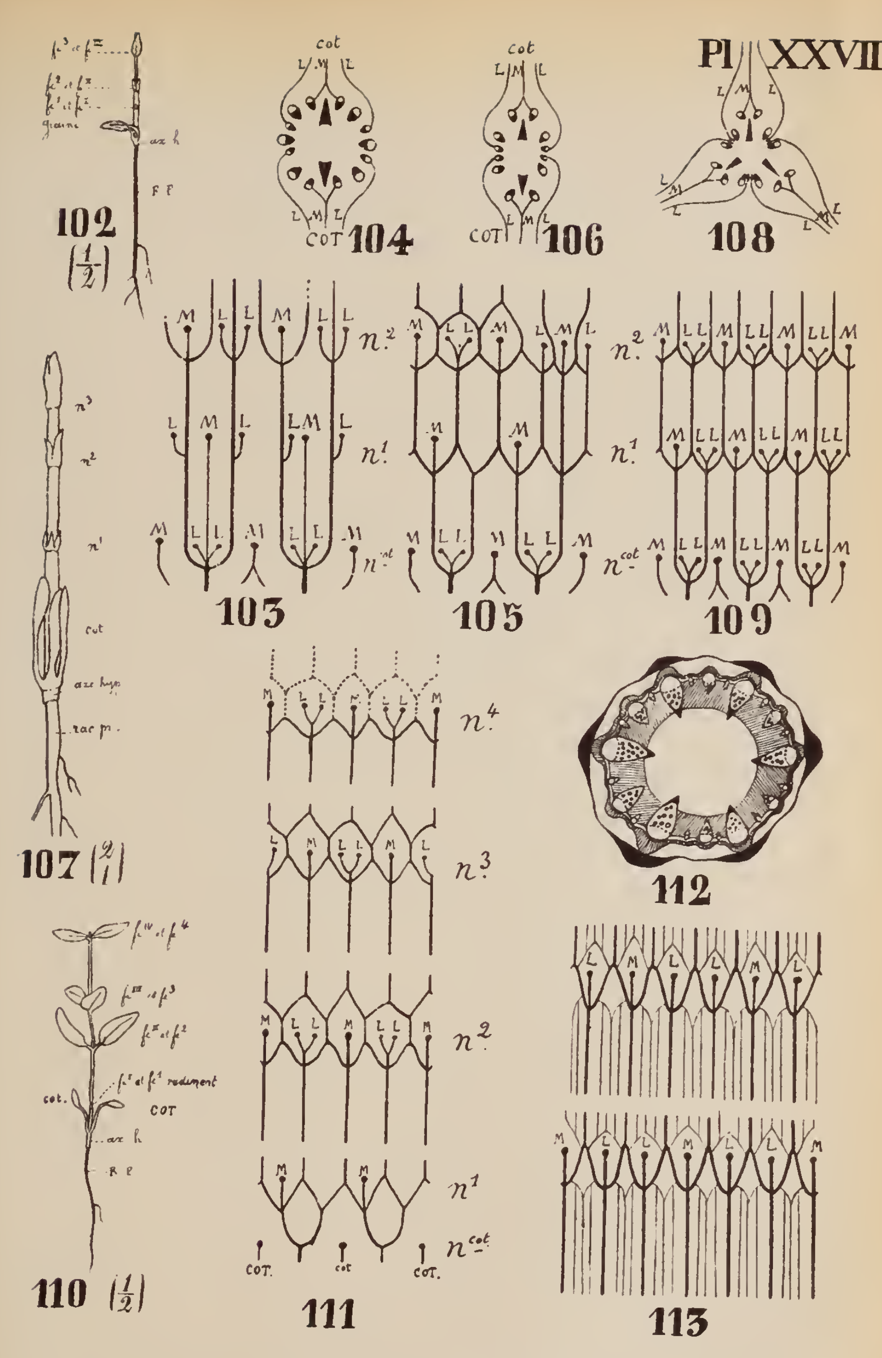
CLEMATIS FLAMMULA L.

Fig. 110. — Plantule (p. 46).

Fig. 111. — Parcours des faisceaux dans la tige principale (p. 46).

Fig. 112. — Entre-nœud de la tige d'une plante adulte (p. 47).

Fig. 113. — Parcours des faisceaux dans deux segments de la tige d'une plante adulte (p. 47).



CLEMATIS VITICELLA: Fig. 102 à 109.

CLEMATIS FLAMMULA. Fig 110 à 113

R. Sterckx ad. nat. del.

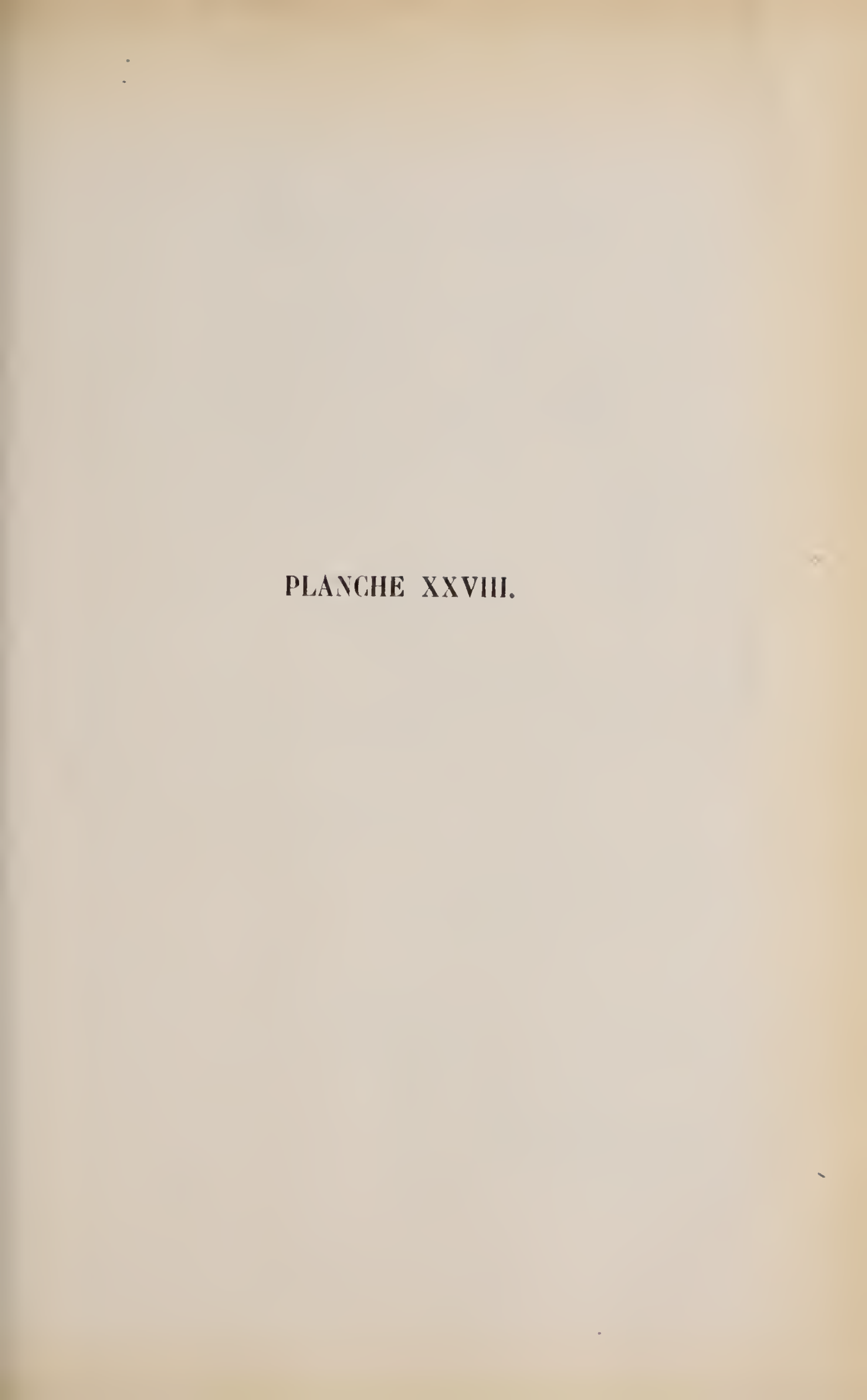


PLANCHE XXVIII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXVIII.

CLEMATIS FLAMMULA L.

Fig. 114. — Coupe à la base du nœud cotylédonaire de la plantule figure 110 (p. 46).

CLEMATIS RECTA L.

Fig. 115. — Entre-nœud de la tige d'une plante adulte (p. 49).

ATRAGENE ALPINA L.

Plantules.

Fig. 116. — Plantule jeune (p. 50).

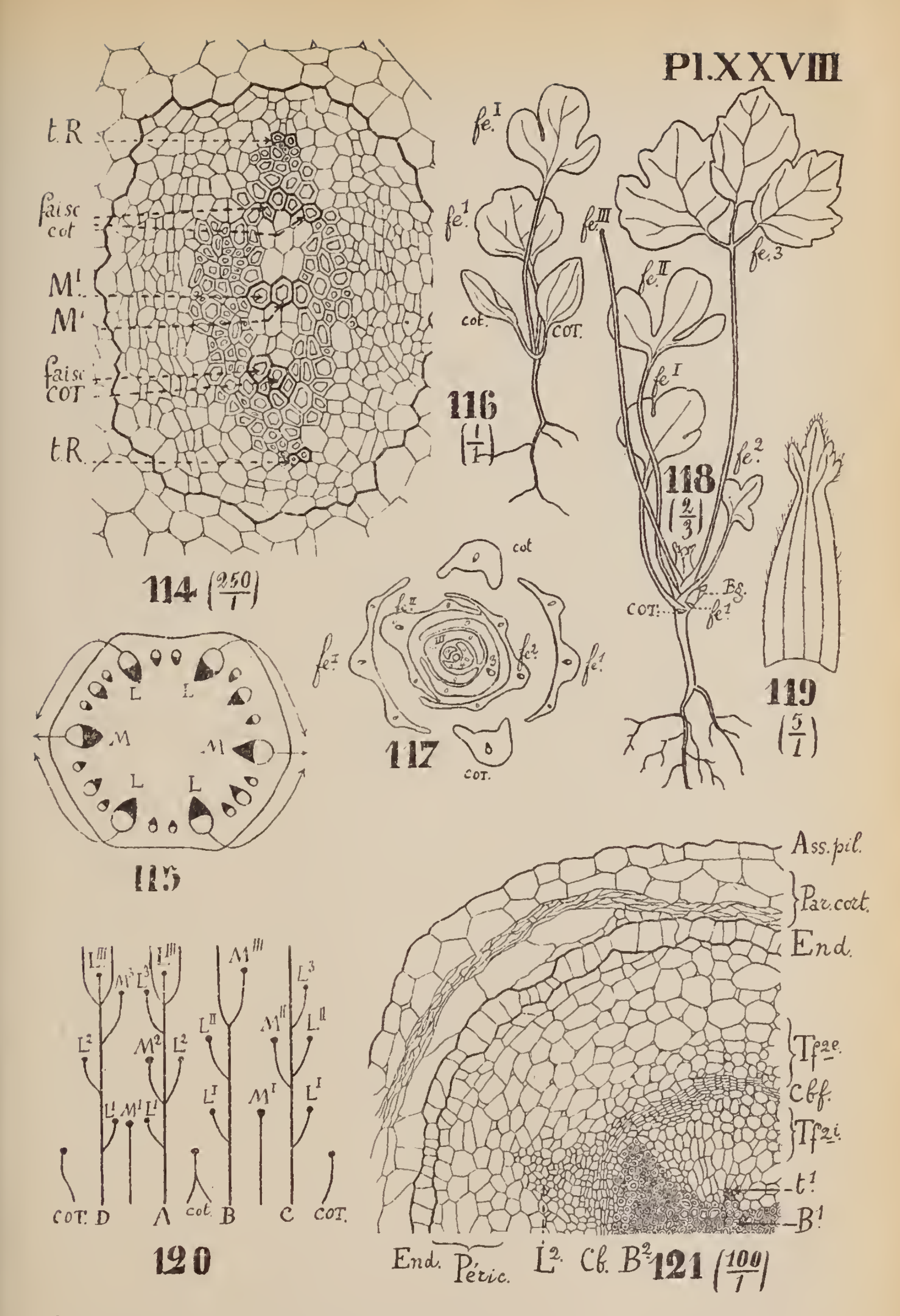
Fig. 117. — Projection des appendices de la plantule précédente (p. 51).

Fig. 118. — Plantule plus âgée (p. 50).

Fig. 119. — Une feuille pérulaire du bourgeon qui termine la tige principale à la fin de la première année (p. 50).

Fig. 120. — Parcours des faisceaux dans la tige principale de la plantule figure 118 (p. 50).

Fig. 121. — Racine principale (p. 51).



CLEMATIS FLAMMULA: Fig. 114.

CLEMATIS RECTA: Fig. 115.

ATRAGENE ALPINA: Fig. 116 à 121

R. Sterckx ad. nat. del.



PLANCHE XXIX.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXIX.

ATRAGENE ALPINA L.

Plante adulte.

Fig. 122. — Portion d'une plante adulte (p. 52).

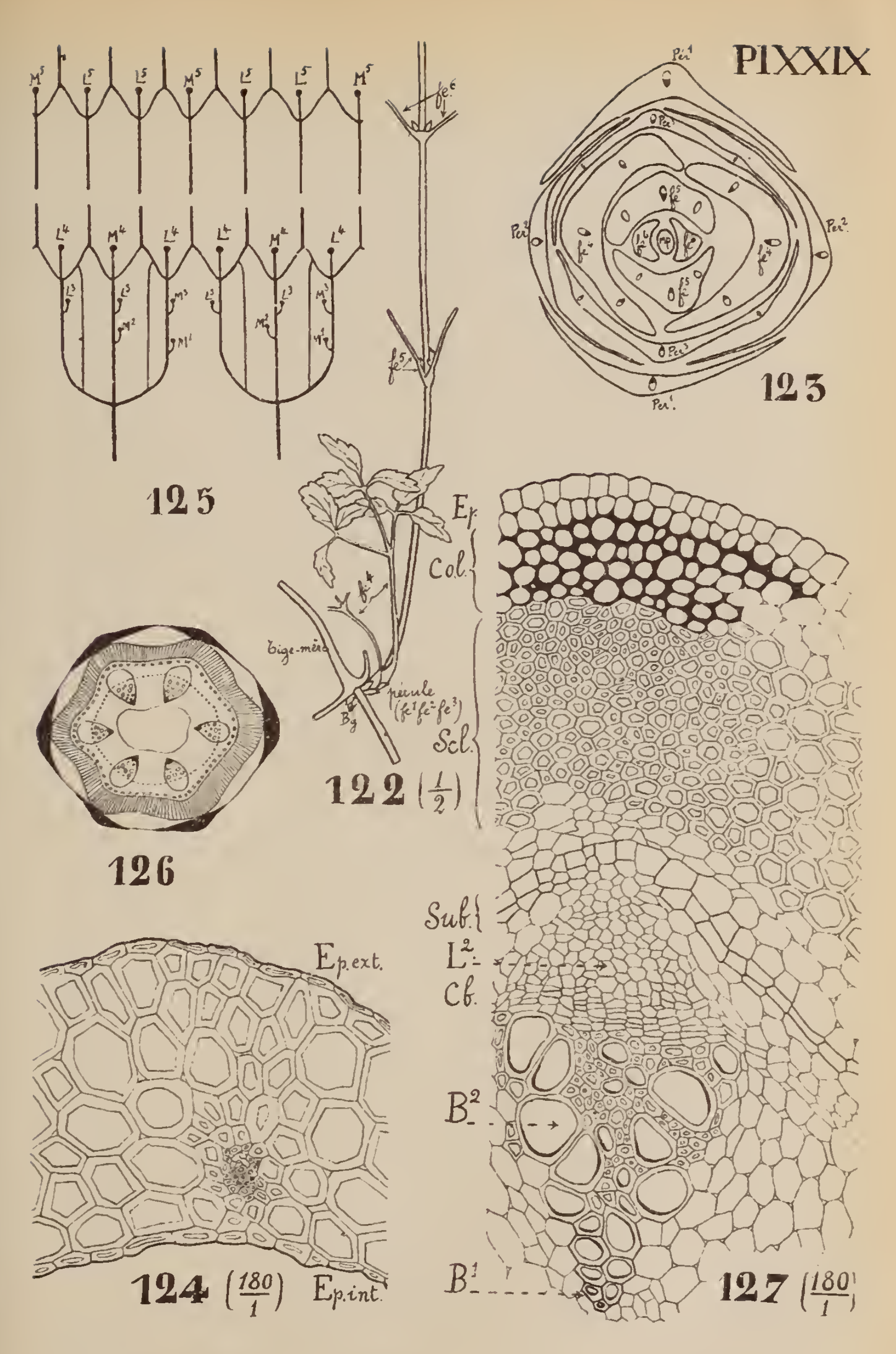
Fig. 123. — Section transversale d'un bourgeon non encore développé (p. 52).

Fig. 124. — Section transversale d'une feuille pérulaire (p. 52).

Fig. 125. — Parcours des faisceaux dans la portion inférieure d'une tige (p. 52).

Fig. 126. — Ensemble de l'entre-nœud 6 de la tige d'un an (p. 52).

Fig. 127. — Portion de la coupe précédente grossie davantage (p. 52).



125

123

122 (1/2)

126

124 (180/1)

127 (180/1)

ATRAGENE ALPINA (suite)

R Sterckx ad nat. del.

TABLE DES MATIÈRES.

SECONDE PARTIE.

ÉTUDE

DES

SINGULARITÉS D'UNE SURFACE

DU TROISIÈME ORDRE

ENGENDRÉE PAR UN SYSTÈME DE FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES H_2^3

PAR

W. A. VERSLUYS

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

ÉTUDE

DES

SINGULARITÉS D'UNE SURFACE

DU TROISIÈME ORDRE

ENGENDRÉE PAR UN SYSTÈME DE FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES H_2^3

CHAPITRE PREMIER.

§ 1. Considérons dans l'espace trois droites, supports de trois ponctuelles x_1, y_1, z_1, et trois autres droites x, y, z, axes de trois faisceaux de plans.

Les trois plans ξ_i, η_i, ζ_i des trois faisceaux (x), (y), (z), qui passent par un point P_i, coupent respectivement les droites x_1, y_1, z_1 en trois points X_i, Y_i, Z_i, qui, en général, déterminent un plan π_i. Inversement, un plan quelconque de l'espace π_i marque sur les droites x_1, y_1 et z_1 trois points X_i, Y_i, Z_i, qui, par leur jonction aux droites x, y et z, déterminent trois plans ξ_i, η_i, ζ_i se coupant, en général, en un point P_i.

Nous dirons que le point P_i et le plan π_i se correspondent. De cette manière, on obtient une correspondance entre les plans et les points de l'espace.

§ 2. Nous dirons qu'un plan ou qu'un point est singulier, lorsqu'il lui correspond respectivement ou une infinité de points, ou une infinité de plans.

Un point P_i sera singulier : 1° si les points X_i, Y_i, Z_i correspondants des ponctuelles x, y, z, sont en ligne droite; ces trois points se trouvent alors sur une génératrice a_i de l'hyperboloïde déterminé par les droites x_1, y_1, z_1. Cet hyperboloïde sera désigné par $H_2(x_1, y_1, z_1)$. Dans ces cas, au point P_i il correspond tous les plans qui passent par la droite a_i. La droite a_i, en décrivant la surface $H_2(x_1, y_1, z_1)$, détermine sur les droites x_1, y_1, z_1 trois ponctuelles projectives, les trois faisceaux de plans (x), (y), (z), qui unissent les points correspondants de ces trois ponctuelles aux trois droites x, y, z sont aussi projectifs. Le lieu des intersections des plans homologues de ces trois faisceaux est une cubique gauche, $c_3(x, y, z)$, qui a les droites x, y, z pour bisécantes. De ce qui précède, il résulte que le lieu des points singuliers, tels que leurs plans correspondants contiennent une droite a de l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1, z_1)$, est une cubique gauche, qui a les droites x, y, z pour bisécantes. Les plans correspondants aux points de la cubique $c_3(x, y, z)$ sont les plans tangents de la surface $H_2(x_1, y_1, z_1)$.

2° Le plan π_i, correspondant à un point P_i, peut être indéterminé si un des trois points X_i, Y_i, Z_i est indéterminé. X_i, par exemple, sera indéterminé si le plan $(P_i x)$ contient la droite x_1, mais alors les droites x et x_1 doivent se rencontrer; les éléments x et x_1 ne sont pas arbitraires; il faut donc exclure ce cas.

3° Enfin le point P_i peut être un point singulier lorsque le plan $(P_i x)$, par exemple, est indéterminé ; pour qu'il en soit ainsi, il faut que le point P_i soit sur la droite x. Si le point P_i se meut sur la droite x, les plans $(P_i y)$, $(P_i z)$ décrivent deux faisceaux projectifs; les points correspondants, Y_i, Z_i, forment deux ponctuelles projectives; donc les droites $\overline{Y_i Z_i}$ décrivent un hyperboloïde $H_2(y_1, z_1)$. Les plans π_i correspondant aux points P_i de la droite x, sont les plans tangents d'un hyperboloïde $H_2(y_1, z_1)$. De même, les droites y et z sont des lieux de points singuliers.

§ 3. Inversement, aux points P d'une droite b qui rencontre les droites x, y et z, il correspond un seul plan π. Le lieu de ces plans singuliers π, à chacun desquels il correspond tous les

points d'une droite b, est une courbe de la troisième classe, qui aura les droites x_1, y_1, z_1 comme droites situées dans deux plans osculateurs. Indiquons cette cubique par la notation $d_3(x_1, y_1, z_1)$.

A un plan π passant par une des droites x_1, y_1, z_1, correspondent tous les points d'une droite qui rencontre un des trois couples de droites, y et z, z et x ou x et y. Si le plan π décrit le faisceau (x_1), les points correspondants sont sur un hyperboloïde $H_2(y, z)$. Ces théorèmes sont une conséquence directe de ceux du § 2, car, par une transformation par polaires réciproques, la correspondance se transforme en une autre analogue. Évidemment la cubique $d_3(x_1, y_1 z_1)$ est circonscrite aux trois hyperboloïdes $H_2(x_1, y_1)$, $H_2(y_1, z_1)$, $H_2(z_1, x_1)$.

§ 4. Si le point P_i décrit une droite l quelconque, les trois ponctuelles X_i, Y_i, Z_i correspondantes sont projectives ; par conséquent, les plans π_i qui unissent les points homologues enveloppent une courbe gauche de la troisième classe. Nous pourrons en conclure que le lieu des points P, tels que le plan correspondant π passe par ce point P, est une surface du quatrième degré. En effet, pour chercher le degré de la surface en question, il faut chercher le nombre des points P situés sur une droite l et tels que le plan correspondant π coupe la droite l en un point Q coïncidant avec P. A un point P de la droite l, il correspond un seul point Q, et à un point Q de la droite l, il correspond trois points P ; ces trois points P sont les points homologues des trois plans osculateurs de la courbe correspondant à la droite l, qui passent par le point Q. Les coïncidences de la correspondance (3, 1), que nous venons d'établir sur la droite l, étant au nombre de quatre, le lieu cherché est bien du quatrième degré, O_4. Cette surface contient les droites x_1, y_1 et z_1. En effet, si, par exemple, P_i est sur la droite x_1, le plan correspondant $\pi_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ passe par le point P_i puisque P_i coïncide avec X_i. Remarquons que la cubique gauche $c_3(x, y, z)$ et les droites x, y, z sont également situées sur la surface O_4, car parmi les plans correspondant à un point singulier, il y en a toujours un qui passe par le point singulier.

§ 5. On démontre de même les théorèmes réciproques suivants :

1° Les points P, correspondant aux plans d'un faisceau, sont situés sur une cubique gauche;

2° L'enveloppe des plans qui passent par leur point correspondant est une surface de la quatrième classe, passant par les droites x, y, z, x_1, y_1, z_1; cette surface est de plus inscrite dans la développable, dont la courbe $d_3(x_1, y_1, z_1)$ est l'arête de rebroussement.

§ 6. Théorème. — Les plans correspondant aux points d'un plan α enveloppent une surface de la troisième classe.

Remarquons, en effet, que par une droite quelconque l, il ne passe que trois plans du lieu; ces plans sont les plans correspondants des trois points où la cubique gauche correspondante de la droite l (§ 5, 1°) rencontre le plan α.

On démontre de même que les plans correspondant aux points d'une surface d'ordre n, S_n, enveloppent une surface de classe $3n$. Si la surface S_n passe par quelques-uns des lieux de points singuliers x, y, z, $c_3(x, y, z)$, il faut diminuer la classe de la surface correspondante de deux unités pour chaque lieu.

A une surface S_2 il correspond, en général, une surface de classe 6, Σ_6. Si S_2 passe par les droites x et y, par exemple, Σ_6 se décompose en trois surfaces Σ_2, dont deux sont les hyperboloïdes $H_2(y_1, z_1)$, $H_2(z_1, x_1)$.

Comme la surface S_2 rencontre chaque droite b_i deux fois, la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ est un lieu de plans bitangents à Σ_6; de même les droites x_1, y_1, z_1 sont des lieux de plans bitangents de Σ_6. Ceci étant encore vrai quand Σ_6 est décomposable, on voit que dans l'exemple de décomposition cité ci-dessus, la troisième Σ_2 doit passer par les droites x_1 et y_1.

A une S_2 passant par la cubique $c_3(x, y, z)$ et la droite x, il correspond les surfaces $H_2(x_1, y_1, z_1)$, $H_2(y_1, z_1)$ et une Σ_2, qui passe par la droite x_1 et est inscrite dans la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$.

A une S_2, qui passe par les droites x, y, z, il correspond les

trois quadriques $H_2(y_1, z_1)$, $H_2(z_1, x_1)$, $H_2(x_1, y_1)$, qui sont toutes inscrites dans la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$.

A une surface S_3, il correspond une surface Σ_9, dont la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ et les droites x_1, y_1, z_1 sont des lieux de plans tritangents. Si la surface S_3 passe par les droites x, y, z, il correspond à S_3 trois surfaces Σ_2 et une surface Σ_3 qui passe par les droites x_1, y_1, z_1.

Si la surface S_3 est une surface réglée, dont x est la droite double et y le lieu des plans bitangents, Σ_9 est décomposable en trois Σ_2 et une Σ_3, qui sera de nouveau réglée et qui a la droite z_1 pour lieu des plans bitangents et la droite y_1 pour droite double.

En général, à une surface réglée dont toutes les génératrices rencontrent deux fois un lieu de points singuliers, il correspond une surface réglée. Si S_3 passe par les lignes x, y, z, $c_3(x, y, z)$, la surface Σ_9 est décomposable en quatre Σ_2 et une gerbe de plans.

Une surface Σ_{3n} correspondant à une surface S_n admet les lignes x_1, y_1, z_1 et $d_3(x_1, y_1, z_1)$ comme lieux de plans n fois tangents.

§ 7. Réciproquement : 1° le lieu des points correspondant aux plans d'une gerbe est une surface du troisième ordre;

2° Le lieu des points correspondant aux plans tangents d'une surface de classe m est une surface d'ordre $3m$, laquelle a la cubique $c_3(x, y, z)$ et les droites x, y, z comme lieux de points m^{uples}.

§ 8. Nous venons de voir que les points correspondants des plans d'une gerbe de centre U décrivent une surface cubique S_3. Aux plans de la gerbe qui sont tangents à l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1, z_1)$, il correspond les points de S_3 situés sur la courbe que nous avons désignée précédemment par $c_3(x, y, z)$: il est de plus visible que les droites x, y et z sont situées sur la surface S_3.

Considérons une seconde gerbe de centre U' et la surface correspondante S'_3. Les surfaces S_3 et S'_3 ont en commun, outre la courbe $c_3(x, y, z)$ et les droites x, y, z, une cubique gauche. Cette courbe est la courbe correspondante de l'axe $l = UU'$.

On peut conclure de là que la correspondance que nous avons établie entre les points et les plans de l'espace n'admet pas d'autres points singuliers que ceux que nous avons indiqués.

Supposons, en effet, qu'il y ait un nouveau point singulier P, qui ne soit ni sur la cubique $c_3(x, y, z)$, ni sur aucune des droites x, y et z. A ce point, il correspondra un faisceau de plans : au moins un des plans de ce faisceau passera par le point U et de même un autre par le point U′. Donc les deux surfaces S_3 et S'_3 correspondant à U et U′ auraient, outre l'intersection du 9ième degré, que nous avons indiquée plus haut, un point P en commun, situé en dehors de cette intersection, le point P étant, par supposition, en dehors des courbes $c_3(x, y, z)$, x, y, z, et ne sera pas, en général, sur la cubique correspondant à l'axe l, puisque le faisceau (l) et le faisceau correspondant au point P n'auront pas de plan commun.

§ 9. Les plans correspondant aux points d'une courbe de degré n enveloppent une courbe de classe $3n$. En effet, le nombre de plans du lieu cherché qui passent par un point P, est égal au nombre de points de la courbe c_n situés sur la surface cubique correspondant à P; le nombre de ces points est $3n$; donc la classe est $3n$.

Si la courbe c_n, de degré n, rencontre une ou plusieurs fois une des lignes $c_3(x, y, z)$, x, y, z, la courbe correspondante, de classe $3n$, se décompose, puisqu'à chaque point de rencontre il correspond un faisceau de plans.

Exemples :

A une droite l, il correspond, en général, une cubique gauche c_3. Si l est une sécante de la cubique $c_3(x, y, z)$, la courbe c_3 se décompose en une droite a et un cône du second degré, qui auront un plan en commun. Si la droite l est une bisécante de la cubique $c_3(x, y, z)$, la courbe correspondante se décompose en deux droites a et une droite qui les rencontre toutes les deux.

Si l est une droite b, la courbe c_3 se décompose en trois droites, qui sont dans un plan; ce plan est le plan osculateur de

la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, auquel correspondent tous les points de la droite b.

Aux points d'une conique c_2, il correspond les plans d'une courbe de la sixième classe c_6, circonscrite à la surface de classe trois correspondant au plan de la conique c_2. Si c_2 contient quatre points singuliers, la courbe c_6 se décompose en quatre faisceaux et un cône du second degré.

Un plan quelconque rencontre les lignes x, y, z et $c_3(x, y, z)$ en six points; par cinq de ces points on pourra toujours faire passer une conique; aux points de cette conique il correspond six faisceaux de plans, dont cinq correspondent aux cinq points singuliers qui sont situés sur c_2 et l'autre à tous les autres points. Cette dernière droite rencontre les cinq premières. Les six points singuliers, qui sont dans un plan, peuvent être situés sur une conique, mais alors les six éléments x, y, z, x_1, y_1, z_1 ne sont plus arbitraires. Nous reviendrons sur ce cas.

Aux points d'une cubique plane c_3 il correspond des plans d'une courbe de classe neuf, qui est circonscrite à la surface de classe trois correspondant au plan de la cubique c_3. Cette courbe de la neuvième classe peut se décomposer en six faisceaux et une cubique en faisant passer c_3 par les six points singuliers de son plan. Si la cubique c_3 a un point double, on peut faire coïncider ce point double avec un point singulier du plan et faire passer c_3 par les cinq autres; alors la courbe de la neuvième classe est décomposable en un cône et six faisceaux de plans dont un doit être considéré comme double.

A une cubique gauche c_3 il correspondra encore une courbe de la neuvième classe k_9. Nous avons vu qu'à un faisceau de plans (l) il correspond une cubique c_3'; comme à une courbe c_3 il correspond, en général, une courbe k_9, il faut que c_3' ne soit pas une cubique gauche arbitraire, mais satisfasse à certaines conditions; comme le faisceau (l) contient deux plans tangents de chacun des hyperboloïdes $H_2(x_1, y_1, z_1)$, $H_2(x_1, y_1)$, $H_2(y_1, z_1)$, $H_2(z_1, x_1)$, c_3' doit avoir deux points communs avec les lignes c_3 (x, y, z), x, y, z. La cubique c_3' contient donc huit points singuliers, donc aussi sa courbe correspondante est bien

décomposable en neuf faisceaux, dont huit correspondent aux points singuliers de la cubique c_3' et l'autre faisceau aux points restants de la courbe c_3'.

En général, à chaque courbe plane il correspond une courbe (développable) circonscrite à la surface de la troisième classe correspondant au plan de la courbe.

§ 10. Réciproquement, le lieu des points correspondant aux plans osculateurs d'une courbe K_n de classe n est une courbe c_{3n} de degré $3n$.

Si la courbe K_n contient des plans singuliers, c'est-à-dire des plans des faisceaux (x_1), (y_1), (z_1) ou de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, la courbe correspondante c_{3n} se décompose, puisqu'à chaque plan singulier il correspond déjà une droite.

Par exemple, à un faisceau (l), dont le support l rencontre deux des droites x_1, y_1, z_1, il correspond une cubique c_3, qui est décomposable en trois droites, dont deux sont les droites correspondantes des plans (lx_1) et (ly_1) et l'autre correspond aux plans restants du faisceau (l).

A un faisceau (l) dont l'axe est dans deux plans osculateurs de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, il correspond une cubique c_3 qui est décomposable en trois droites dont deux sont des droites b. En général, à un faisceau dont l'axe est la droite d'intersection de deux plans singuliers, il correspond trois droites, dont deux correspondent aux deux plans singuliers, et les points de la troisième droite sont les points correspondant à tous les autres plans du faisceau.

A un cône du second degré, considéré comme lieu de ses plans tangents, il correspond, en général, une courbe c_6, qui est située sur la surface S_3 du troisième degré, correspondant à la gerbe qui a pour centre le sommet du cône. Si le cône est tangent à cinq plans singuliers, pris parmi les six plans singuliers qui passent par le sommet du cône, la courbe correspondante se compose de six droites, dont cinq correspondent aux cinq plans singuliers et l'autre à tous les autres plans tangents

du cône. Cette dernière droite rencontre évidemment les cinq premières.

Aux plans tangents d'un cône de la troisième classe il correspond, en général, une courbe c_9, située sur la surface S_3, lieu des points correspondant aux plans passant par le sommet. Cette courbe c_9 peut se décomposer en six droites et une cubique, ou en sept droites, dont deux coïncident, et une conique. Ceci sera le cas lorsque le cône est tangent aux six plans singuliers qui passent par son sommet, ou lorsque l'un de ces plans est un plan bitangent et les cinq autres plans sont tangents ordinaires.

En général, à tout cône de classe n il correspond une courbe de degré $3n$, qui se trouve sur la surface S_3, qui est le lieu des points correspondant aux plans passant par le sommet du cône.

A une cubique gauche k_3, considérée comme lieu de ses plans osculateurs, il correspond une courbe c_9. Cette courbe c_9 se décompose en neuf droites si la courbe k_3 a deux plans osculateurs communs avec la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ et si les droites x_1, y_1, z_1 sont des droites situées dans deux plans osculateurs de la courbe k_3.

§ 11. Théorème. — Si nous considérons comme la classe de la courbe correspondant à une courbe plane c_n de degré n, la classe de la courbe qui reste quand on fait abstraction des faisceaux provenant de points singuliers situés sur la courbe c_n, cette classe sera, pour $n > 2$, toujours supérieure à l'unité.

En effet, supposons que la courbe c_n ait pour sa plus grande singularité un point $(n-k)^{\text{uple}}$. Les autres singularités sont au plus des points k^{uples}. Supposons que c_n ait encore cinq de ces points; k est au plus $\frac{n}{2}$; si donc n est impair, k est au plus $\frac{n-1}{2}$. Si ces six singularités de c_n coïncident avec les six points singuliers du plan de la courbe c_n, la classe de la courbe k_m correspondant à c_n sera

$$m = 3n - (n-k) - 5k = 2n - 4k = 2n - 4\frac{n-1}{2} = 2.$$

Supposons maintenant n pair; la singularité la plus grande

étant un point $(n-k)^{\text{uple}}$, la classe de la courbe k_m est au plus $2n-4k$; la plus grande valeur de k est $\frac{n}{2}$, donc pour $k=\frac{n}{2}$ la classe sera un minimun. Pour une valeur de k plus petite, par exemple $\frac{n}{2}-p$, la classe de la courbe k_m sera au plus

$$2n-4\left(\frac{n}{2}-p\right)=4p>1.$$

Pour $k=\frac{n}{2}$, la classe de la courbe k_m est zéro. Mais ceci est impossible, comme le nombre de points doubles équivalant à six points $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{uples}}$ est

$$6\times\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}=\frac{3n^2-6n}{4};$$

ce nombre est plus grand que le nombre maximum de points doubles de la courbe c_n, pour $n>2$, ce nombre étant

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{2n^2-6n+4}{4}.$$

Si la courbe c_n avait cinq points $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{uples}}$ et un point $\left(\frac{n}{2}-1\right)^{\text{uple}}$, la classe de la courbe k_m serait un. Mais ceci est encore impossible. Le nombre de points doubles équivalents à ces singularités est

$$5\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}+\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}{2}=\frac{3n^2-8n+4}{4},$$

$$\text{ce qui} > \frac{2n^2-6n+4}{4} \quad \text{si} \quad n>2.$$

S'il y a moins que cinq points $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{uples}}$, ou bien s'il y a cinq points $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{uples}}$ et un point de multiplicité plus petite que $\left(\frac{n}{2}-1\right)$, la classe de la courbe k_m est >1. La classe de la courbe k_m est donc toujours plus grande que l'unité si $n>2$.

Par conséquent, la droite et la conique sont les seules courbes planes dont les courbes correspondantes peuvent se décomposer en des faisceaux de plans seulement.

§ 12. Réciproquement, si l'on considère comme le degré de la courbe, qui correspond à une courbe k_n de classe n, le degré de la courbe restant quand on fait abstraction des droites provenant de plans singuliers de la courbe k_n, ce degré, pour n plus grand que 2, est toujours plus grand que l'unité.

§ 13. A chacun des six plans singuliers passant par le point U il correspond une droite de la surface S_3. A chacune des quinze droites d'intersection l de deux de ces plans, il correspond encore une droite de la surface S_3. A chacun des six cônes du second degré qui ont leur sommet en U et qui sont tangents à cinq des plans singuliers, il correspond une droite de la surface S_3. Il y a donc $6 + 15 + 6 = 27$ droites sur la surface S_3. Comme il a été démontré qu'il n'y a pas plus que six plans singuliers qui passent par U et que les seuls cônes qui peuvent donner des droites sont le faisceau de plans qui a pour axe l'intersection de deux plans singuliers et le cône du second degré qui est tangent à cinq plans singuliers, il s'ensuit qu'il n'y a pas plus que ces vingt-sept droites situées sur la surface S_3.

Les six plans singuliers qui passent par le point U seront désignés dans la suite par les notations suivantes :

$$(Ux_1) = \xi, \quad (Uy_1) = \eta, \quad (Uz_1) = \zeta;$$

les trois plans osculateurs de la cubique $d_3\,(x_1, y_1, z_1)$ seront β_1, β_2, β_3. Les droites d'intersection de deux plans singuliers seront :

$$\overline{\xi\beta_1} = l_{x1}, \quad \overline{\eta\beta_2} = l_{y2}, \quad \overline{\beta_2\beta_3} = l_{23}, \text{ etc.}$$

Les cônes tangents à cinq plans singuliers auront pour indice le plan manquant

$$k_x; \quad k_y; \quad k_z; \quad k_1; \quad k_2; \quad k_3.$$

Les droites de la surface S_3, données par les plans singuliers, seront les droites b_x, b_y, b_z, b_1, b_2 et b_3.

La droite donnée par un faisceau (l) sera une droite g avec le même indice que l. Les trois premiers cônes donnent les droites x, y, z; les trois derniers cônes des droites t_1, t_2, t_3.

Réciproquement, la surface de la troisième classe Σ_3 correspondant à un plan μ possède vingt-sept droites.

§ 14. On retrouve maintenant avec une grande facilité les propriétés des droites d'une surface du troisième degré.

Une droite est rencontrée par dix autres droites.

Considérons successivement une des droites des trois groupes de six, quinze et six droites.

b_y, par exemple, ne rencontre aucune des autres droites du premier groupe, puisque les plans singuliers n'ont pas un élément en commun qui puisse correspondre à un point de rencontre de ces droites; b_y rencontre les cinq droites g, qui portent l'indice y, puisque parmi les plans du faisceau (l), correspondant à une telle droite g, il se trouve toujours le plan η; b_y rencontre encore les cinq droites du dernier groupe qui ne portent pas ce même indice y, puisque parmi les plans tangents de ces cinq cônes se trouve le plan η.

La droite g_{y1}, par exemple, rencontre les droites b_y et b_1; ensuite les six droites g, qui n'ont aucun indice en commun avec elle, et les droites y et t_1, qui correspondent à des cônes qui ne sont pas tangents aux deux plans η et β_1 à la fois.

La droite y rencontre les six droites du premier groupe, sauf b_y, et les droites g dont la correspondante l n'est pas l'intersection de deux plans tangents de k_y; ce sont les droites g qui portent l'indice y. La droite y ne rencontre aucune des droites du dernier groupe.

Deux droites qui ne se rencontrent pas sont rencontrées par cinq droites.

Par exemple, les droites b_x et b_3 sont rencontrées par la droite g_{x3} et les quatre droites y, z, t_1, t_2, qui correspondent aux cônes tangents aux plans ξ et β_3.

Les droites b_y et y rencontrent les cinq droites g, qui portent l'indice y.

Les droites g_{y1} et g_{y3} rencontrent les droites b_y et y et les trois droites g, qui n'ont aucun indice commun avec elles.

Les droites b_y et g_{z1} rencontrent les droites g_{xy}, g_{y2}, g_{y3}, z, t_1.

Les droites g_{x2} et t_3 rencontrent les droites b_x, b_2, g_{y3}, g_{z3}, g_{13}.

Les droites y et x rencontrent les droites b_1, b_2, b_3, b_z, g_{zy}.

Trois droites qui ne se rencontrent pas sont rencontrées par trois droites.

Par exemple : les droites x, y, z sont rencontrées par les droites b_1, b_2, b_3.

Les droites b_z, x, g_{y1} sont rencontrées par les droites g_{zz}, g_{z2}, g_{z3}.

Les droites b_z, g_{y1}, g_{z1} sont rencontrées par les droites g_{x2}, g_{x3}, t_1.

Quatre droites qui ne se rencontrent pas ont deux sécantes communes.

Par exemple : les droites x, y, z, g_{12} rencontrent les droites b_1 et b_2.

Cinq droites qui ne se rencontrent pas ont une ou deux sécantes communes.

Par exemple : les droites x, y, z, g_{12}, g_{23} rencontrent la droite b_2. Les droites x, y, z, g_{12}, t_3 rencontrent les droites b_1 et b_2.

Un quintuple qui admet une bisécante admet une droite qui ne rencontre aucune de ces cinq droites, pour former un sextuple.

Par exemple : les droites x, y, z, g_{12}, g_{23}, g_{31} forment un sextuple.

Un quintuple qui a deux sécantes communes ne fait partie d'aucun sextuple.

§ 15. Aussi longtemps que les six éléments x, y, z, x_1, y_1, z_1 sont réels, quatre, au moins, des plans singuliers qui passent par le point U sont réels. Dans ce cas, quatre droites du premier groupe, sept droites du second groupe et quatre droites du der-

nier groupe sont réelles. La partie de l'espace où les trois plans osculateurs de la courbe $d_3(x_1, y_1, z_1)$, menés de U, sont réels et celle où seulement un d'eux est réel, sont séparées l'une de l'autre par la surface telle que de l'un de ses points on peut mener trois plans osculateurs dont deux coïncident; cette surface est la surface développable dont la courbe $d_3(x_1, y_1, z_1)$ est l'arête de rebroussement.

Les plans qui passent par le point U donnent une représentation des points de la surface S_3. A chaque courbe située sur la surface S_3, il correspond un cône qui a le point U pour sommet.

Prenons un cône k_2, dont le sommet est U, et qui est tangent à deux plans singuliers, par exemple aux plans ξ et η. Il lui correspond une courbe c_4, sur la surface S_3.

Recherchons combien de fois cette c_4 rencontre les droites de la surface S_3.

c_4 rencontre

0 fois :	1 fois :	2 fois :	3 fois :
b_z, b_1, b_2, b_3;	b_x, b_y;		
g_{xy};	$g_{xz}, g_{x1}, g_{x2}, g_{x3}$,	g_{z1}, g_{z2}, g_{z3},	
	$g_{yz}, g_{y1}, g_{y2}, g_{y3}$;	g_{12}, g_{23}, g_{31};	
		$z, 1_1, 1_2, 1_3$;	x, y.

On pourrait considérer cette c_4 comme l'intersection de la surface S_3 avec la surface correspondante d'une surface S_2 qui passe par x_1 et y_1. En effet, à cette surface S_2 correspondent trois hyperboloïdes, à savoir, les surfaces $H_2(y, z)$, $H_2(z, x)$ et une autre H_2. $H_2(y, z)$ et $H_2(z, x)$ rencontrent la surface S_3 suivant la cubique $c_3(x, y, z)$. Le troisième hyperboloïde rencontre donc la surface S_3 suivant les droites x, y et une courbe du quatrième degré, qui est la courbe correspondant au cône k_2, circonscrit à la surface S_2 et qui a le point U pour sommet. La courbe c_4 est donc l'intersection des deux surfaces S_3 et H_2, qui ont en commun deux droites qui ne se rencontrent pas.

Cherchons la représentation dans la gerbe (U) d'une courbe du quatrième degré c'_4, donnée par l'intersection des surfaces S_3 et S_2, qui ont déjà en commun deux droites situées dans un plan. Prenons comme exemple une surface S_2, passant par les droites x et g_{xz}. La surface correspondant à S_2 se décompose en une surface de la quatrième classe Σ_4 et l'hyperboloïde $H_2(y_1, z_1)$.

La surface Σ_4 passe par les droites l_{xz}, y_1, z_1; x_1 est un lieu de plans bitangents et la surface Σ_4 est encore inscrite dans la développable formée par les tangentes à la courbe $d_3(x_1, y_1, z_1)$. Le cône circonscrit à la surface Σ_4, et qui a pour sommet le point U, se décompose en la droite l_{xz} et en un cône k_3 qui est tangent aux plans ξ, η, β_1, β_2, β_3. Ce cône k_3 est donc le cône correspondant à la courbe c'_4.

Inversement, à un cône k_3, qui est tangent aux plans ξ, η, β_1, β_2, β_3, il correspond une courbe c'_4, de S_3, qui n'admet pas de droites trisécantes; en effet, la courbe c'_4 rencontre

0 fois :	1 fois :	2 fois :
b_z ;	b_x, b_y, b_1, b_2, b_3,	
	les 10 g sans indice z ;	les 5 g avec indice z ;
	z ;	x, y, t_1, t_2, t_3.

Comme le cône k_3 peut avoir un plan bitangent, un plan inflexionnel ou pas de singularités, il y a trois espèces de courbes c'_4 : 1° avec un point double; 2° avec un point de rebroussement; 3° sans singularités. On vérifie facilement que des courbes c_4 sont données par un cône k_4, qui touche trois plans singuliers du point U, deux fois et deux autres une fois; par un cône k_3, qui touche trois plans singuliers une fois et un quatrième deux fois; par un cône k_4, qui a un des plans singuliers pour plan tritangent et les cinq autres pour plans tangents ordinaires; par un cône k_5, qui a un plan singulier pour plan tritangent, trois plans singuliers pour plans bitangents et les deux restants pour plans tangents, etc.

Des courbes c'_4 sont données par un cône k_4 qui touche deux plans singuliers deux fois et les quatre autres une fois chacun,

par un cône k_3 qui a un plan singulier pour plan tangent et les cinq autres pour plans bitangents.

§ 16. On peut considérer la surface S_3 comme engendrée par deux faisceaux projectifs, l'un de plans et l'autre de surfaces du second degré ayant quatre droites communes.

En effet, prenons un plan quelconque passant par la droite z et qui coupe la droite z_1 au point Z_i. Les points de la surface S_3 situés dans le plan $(Z_i z)$ seront les points P_i, correspondant aux plans π_i qui passent par les points U et Z_i.

Si le plan π_i tourne autour de la droite UZ_i, les points d'intersection de π_i avec les droites x_1 et y_1 forment deux ponctuelles projectives X_i et Y_i; donc, le lieu des intersections de deux plans homologues (xX_i) et (yY_i) des deux faisceaux projectifs (x) et (y) sera un hyperboloïde ${}_iH_2$.

Les points de la surface S_3 situés dans le plan (zZ_i) devant être sur cet hyperboloïde, seront l'intersection du plan (zZ_i) avec la surface ${}_iH_2$.

Si le point Z_i parcourt la droite z_1, la conique d'intersection décrira toute la surface S_3; le plan (zZ_i) décrira un faisceau autour de la droite z, et les hyperboloïdes ${}_iH_2$ auront en commun les droites x, y, g_{xy} et b_z. Ces deux dernières droites sont sur chaque ${}_iH_2$, car on remarque que pour chaque droite UZ_i on peut faire passer un plan π_i, qui contient encore la droite l_{xy}, et un plan qui contient la droite z_1. Les hyperboloïdes ${}_iH_2$ forment donc un faisceau, et comme à chaque plan (zZ_i) il correspond un hyperboloïde ${}_iH_2$ et vice versa, les deux faisceaux sont bien projectifs.

§ 17. Cette génération de la surface S_3 permet d'en trouver la classe. Prenons un point quelconque P de la surface S_3; par le point P il passe un seul plan du faisceau (z) et un seul hyperboloïde ${}_iH_2$.

Les deux droites, issues de P, qui rencontrent respectivement les couples de droites x, y et g_{xy}, b_z, sont les génératrices de l'hyperboloïde ${}_iH_2$ qui passent par le point P. Ces deux

droites déterminent complètement le plan tangent en P à l'hyperboloïde ${}_iH_2$. La droite d'intersection de ce plan tangent avec le plan (Pz) est une tangente en P à la surface S_3, puisque cette droite est tangente à une conique de la surface S_3, passant par le point P. Cette tangente de la surface S_3 rencontre la droite z en un point Q. Cherchons le lieu des points tels que les plans tangents en ces points à la surface S_3 passent par le point Q.

D'abord, la droite z fait partie de ce lieu, puisque le plan tangent en un quelconque de ses points doit contenir la droite z, et passe donc par le point Q. Pour avoir les autres points, il faut chercher le lieu des points P, tels que P est sur la surface S_3 et que le plan tangent en P à la surface ${}_iH_2$, passant par P, passe par le point Q. Faisons parcourir à P une droite l; les droites g, issues de P, qui rencontrent les droites x et y, décrivent un hyperboloïde; il en est de même des droites g_1, issues de P, qui rencontrent les droites g_{xy} et b_z. Ces deux hyperboloïdes ont en commun le faisceau (l); donc les autres plans tangents communs décrivent une courbe de la troisième classe. Ces plans tangents communs seront les plans qui contiennent deux droites g et g_1, passant par un même point P de la droite l; ce sont donc les plans tangents en P à l'hyperboloïde ${}_iH_2$, passant par le point P. Si donc le point P parcourt une droite l, les plans tangents enveloppent une courbe de la troisième classe. Par le point Q, il passe donc trois plans, dont les points de contact avec un hyperboloïde ${}_iH_2$ sont sur la droite quelconque l; par conséquent, le lieu des points de contact P des plans qui passent par le point Q est une surface du troisième degré S'_3. Si le point P se trouve sur une des quatre droites x, y, g_{xy} ou b_z, l'hyperboloïde ${}_iH_2$ est indéterminé; il en est de même du plan tangent. Donc, par chaque point d'une de ces quatre droites il passe un plan tangent qui contient le point Q. Ces quatre droites sont donc sur la surface S'_3. Le lieu cherché est donc l'intersection des deux surfaces S_3 et S'_3. Les quatre droites x, y, g_{xy}, b_z, qui ne font évidemment pas partie du lieu cherché, sont comprises dans cette intersection; si nous décomptons ces droites, nous voyons que le lieu des points P, dont le plan tangent à la surface S_3

passe par le point Q, est une courbe du cinquième degré c_5, avec la droite z; la droite z rencontre la courbe c_5 en trois points.

§ 18. La droite z et la courbe c_5 sont sur une surface du second degré. En effet, cherchons le lieu des droites p qui rencontrent la droite z et sont des bisécantes de la courbe c_5. Dans chaque plan passant par la droite z il se trouve une seule droite du lieu; comme ce plan coupe la courbe c_5 en deux autres points qui ne sont pas sur la droite z, ces deux points déterminent uniquement une droite p du lieu, située dans le plan sécant.

Un plan passant par la droite z coupe donc le lieu cherché suivant deux droites dont l'une, p, est droite simple, et l'autre, z, peut être une droite multiple. Si par chaque point de la droite z il passe en dehors de la droite z, m droites p, ce point sera un point m^{uple} et z sera une droite m^{uple}. Si l'on projette la courbe c_5, d'un point de la droite z sur un plan quelconque, cette projection sera une courbe du cinquième degré, possédant un point triple; elle aura donc au plus encore trois points doubles. Ainsi, par chaque plan de la droite z il passe au plus trois bisécantes p de la courbe c_5; la droite z est donc au plus une droite triple du lieu cherché. Chaque droite p rencontre la surface S_3 seulement sur la courbe c_5 et sur la droite z; l'intersection du lieu cherché avec la surface S_3 consiste donc en tout dans la courbe c_5, qui est courbe simple, et la droite z, qui peut être droite multiple.

Supposons que la droite z soit une droite triple du lieu cherché; ce lieu serait alors du quatrième degré et devrait couper la surface S_3 en une courbe du douzième degré; l'intersection consiste en la courbe c_5 et la droite z qui compte trois fois, ce qui fait une courbe du huitième degré; ainsi la supposition que z soit une droite triple mène à une contradiction; par conséquent, z n'est pas droite triple. De même, on voit que la droite z ne peut pas être une droite double du lieu cherché; par conséquent, z est droite simple et le lieu cherché est une quadrique.

On obtient donc le théorème suivant : *Le lieu des points de la surface* S_3, *dont les plans tangents passent par un point* Q *de la*

droite z, est l'intersection de cette surface avec une surface du second degré.

Les deux surfaces S_3' et S_3 déterminent un faisceau de surfaces du troisième degré. La courbe commune à toutes les surfaces de ce faisceau est formée par la courbe c_3 et un quadrilatère gauche (x, y, g_{xy}, b_z). Sur chaque surface du faisceau il se trouve une droite qui ne rencontre aucune des droites du quadrilatère et qui, par conséquent, rencontre trois fois la courbe c_3; cette droite est donc une génératrice de la quadrique déterminée par la droite z et la courbe c_3.

§ 19. Prenons encore un point quelconque R sur la droite y et cherchons le nombre de plans tangents à la surface S_3, qui passent par la droite $\overline{QR}$. Les points P′, tels que les plans tangents en ces points aux hyperboloïdes contenant les quatre droites x, z, g_{xz}, b_y, passent par le point R, sont situés sur une surface S_3''; cette surface S_3'' rencontre la courbe c_3 en quinze points. Parmi ces quinze points se trouvent les trois points où la droite z rencontre la courbe c_3, et les deux fois deux points où les droites b_y et g_{xz} rencontrent la courbe c_3. Ces sept points ne donnent pas des plans tangents à la surface S_3, qui passent par R; donc il faut faire abstraction de ces sept points et il reste encore huit points de contact sur la courbe c_3. Comme les deux plans (zR) et (yQ) sont des plans bitangents, il y a en tout $8 + 4 = 12$ points de contact de plans tangents à S_3 passant par la droite $\overline{QR}$.

Prenons maintenant une droite quelconque l et cherchons le nombre des plans tangents à S_3, passant par la droite l. Pour cela, cherchons le nombre de systèmes de trois points Q, R, S, situés respectivement sur les droites z, y et x et tels que ces points Q, R, S soient, avec la droite l, dans un plan tangent à la surface S_3. Un plan quelconque π_i, passant par l, détermine sur les droites x, y et z les trois points S_i, R_i, Q_i. Par les points Q_i, R_i passent huit plans tangents, dont les points de contact ne sont pas sur une droite de la surface S_3. Chacun de ces huit plans tangents coupe la droite x en un point S_i'. Par un point S_i

on peut faire passer un seul plan (lS_i), qui détermine les points Q_i, R_i; il s'ensuit qu'à un point S_i, il correspond huit points S'_i. Pour déterminer le nombre des points S_i correspondant à un point S'_i, il faut chercher combien il existe de couples Q_i, R_i situés dans un plan avec la droite l et situés dans un plan tangent à la surface S_3 avec le point S'_i. Faisons parcourir au point R_i la droite y. Comme Q_i doit être dans un plan avec la droite l et le point R_i, à un point R_i il correspondra un seul point Q_i; soit Q'_i un des huit points où la droite z rencontre un des huit plans tangents contenant R_i et S'_i. Le point R_i sera un point d'un couple cherché si le point Q_i coïncide avec un des huit points Q'_i. A un point Q_i correspondent huit points Q'_i. A un point Q'_i correspondent huit points Q_i, puisque par Q'_i et S'_i il passe huit plans tangents. Il y a donc seize couples de points Q_i, R_i, donc seize points S_i correspondant à un point S'_i; par conséquent, il y a vingt-quatre coïncidences de S_i avec S'_i.

Parmi les vingt-quatre solutions, il y en a douze étrangères. En effet, considérons les deux droites b, b_I et b_{II} qui rencontrent la droite l. Les deux systèmes Q_I, R_I, S_I, et Q_{II}, R_{II}, S_{II}, situés sur les droites b_I et b_{II}, sont dans un plan avec la droite l et par chacun d'eux il passe six plans tangents à la surface S_3, dont les points de contact ne sont pas sur une droite de la surface S_3. Évidemment, ces plans tangents ne passent pas, en général, par la droite l; il faut donc diminuer de douze le nombre de couples Q_i, R_i, S_i trouvé. Il y aura donc douze couples de points Q_i, R_i, S_i qui satisfont aux conditions; par conséquent, il y a douze plans tangents qui passent par la droite quelconque l.

CHAPITRE II.

Pour ce qui va suivre, désignons : 1° par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six plans singuliers qui passent par le point U; 2° par $\overline{ij}$ (i et j étant un des nombres de 1 jusqu'à 6) les droites d'intersection de ces six plans singuliers, et enfin, 3° par 1′, 2′, 3′... 6′ les six cônes du second degré qui sont respectivement tangents à cinq des plans singuliers : 1′, par exemple, représente le cône tangent aux cinq plans 2, 3, 4, 5, 6.

Nous conviendrons, en outre, que les droites de la surface S_3 seront indiquées par des lettres g, munies d'indices identiques aux chiffres que portent le plan, le faisceau ou le cône correspondant à la droite g.

§ 1. Supposons que le point U soit tel que les plans 1 et 2 coïncident : dans ce cas, on peut aisément remarquer que les couples de droites dont le tableau suit coïncident et, de plus, qu'elles sont les seules jouissant de cette propriété :

$$g_1,\ g_{23},\ g_{24},\ g_{25},\ g_{26},\ g'_1;$$

$$g_2,\ g_{13},\ g_{14},\ g_{15},\ g_{16},\ g'_2.$$

Ces douze droites formaient sur la surface générale un double six, chaque droite rencontrant les cinq droites de l'autre ligne horizontale, qui ne sont pas avec elle sur la même ligne verticale; il s'ensuit que les six droites formées chacune par la réunion de deux droites primitives, se rencontrent toutes. Comme la droite qui est dans un plan avec les deux droites g_1 et g'_2 est la droite g_{12}, il faut que les droites g_{23}, g_{24}, g_{25}, g_{26}, qui doivent maintenant rencontrer les deux droites g_1 et g'_2, passent par le point de rencontre Q de ces deux dernières ; donc, les six droites passent par un point Q. Les six droites ne sont pas toutes dans un plan ; la surface étant du troisième degré, chaque plan passant

par deux de ces droites contient deux tangentes à la surface S_3; il est donc plan tangent; ainsi, au point Q, il y a plusieurs plans tangents; le point Q est, par conséquent, un plan singulier.

Les six droites de la surface S_3 passant par le point Q sont sur un cône du second degré. En effet, tout cône du second degré, passant par cinq de ces droites, rencontre nécessairement la surface S_3 suivant une sixième droite; puisque cette droite est située sur le cône, elle doit passer par son sommet Q. Or, par le point Q il ne passe que les six droites indiquées; donc, la sixième droite, qui passe par Q, doit être sur le cône du second degré déterminé par cinq de ces droites.

Ce cône est un cône non décomposé en deux plans, car il est impossible que trois des droites passant par le point Q soient dans un plan.

Prenons un exemple : supposons que les trois droites

$$(g_{13}=g_{23}),\quad (g_{14}=g_{24}),\quad (g_{15}=g_{25})$$

soient dans un plan. Dans le plan des deux premières se trouve déjà la droite g_{56}; par conséquent, il se trouverait dans ce plan quatre droites de la surface, ce qui est impossible. Le point Q est donc un point conique de la surface S_3.

Il est possible, de deux manières, que deux des plans singuliers qui passent par le point U coïncident :

1° Deux des plans β peuvent coïncider. Le point U doit être alors sur la surface réglée R_4, dont la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ est l'arête de rebroussement;

2° Un des plans β coïncide avec un des trois plans ξ, η, ζ. Le point U doit se trouver alors dans un des six plans osculateurs de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ qui passent par une des droites x_1, y_1, z_1. Il est impossible que le plan ξ coïncide, par exemple, avec le plan η, puisque dans ce cas les droites x_1 et y_1 seraient dans un plan; donc les six éléments de la correspondance ne seraient plus arbitraires. Dans ce cas, la surface S_3 se décomposerait en un plan et en une quadrique.

Dans le premier cas, tous les plans singuliers sont réels; donc les six droites passant par le point Q sont réelles.

Dans le second cas, il est possible que deux des plans β soient imaginaires conjugués ; parmi les droites qui passent par le point Q, il y en a alors deux imaginaires conjuguées, les quatre autres étant réelles.

Si les plans β_1 et β_2 coïncident, il peut encore arriver qu'en même temps le plan β_3 coïncide avec un des plans ξ, η ou ζ; pour qu'il en soit ainsi, il suffit que le point U se trouve sur une des six coniques qui font partie des intersections de la surface R_4 avec les six plans osculateurs de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, menés par les droites x_1, y_1 ou z_1. Dans ce cas, la surface S_3 aura deux points coniques distincts, puisque ces points sont respectivement sur les deux droites b, correspondant aux plans $\beta_1 = \beta_2$ et β_3, qui, par hypothèse, sont distincts. Par chacun des deux points singuliers passent cinq droites, qui sont toutes réelles.

Si U est sur la droite d'intersection de deux plans osculateurs de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ passant chacun par une des trois droites x_1, y_1 ou z_1, il y aura de nouveau deux couples de plans singuliers coïncidents, et la surface S_3 aura deux points coniques.

Si le point U est un des huit points d'intersection de trois plans osculateurs de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, qui passent chacun par une droite différente parmi les trois droites x_1, y_1 et z_1, il y aura trois couples de plans qui coïncident et la surface S_3 aura trois plans coniques.

§ 2. Supposons que trois des plans singuliers qui passent par le point U coïncident, par exemple les plans 1, 2 et 3. Dans ce cas, les six triples suivants seront réunis chacun en une seule droite :

$$g_1 \equiv g_2 \equiv g_3,$$
$$g'_1 \equiv g'_2 \equiv g'_3,$$
$$g_{23} \equiv g_{31} \equiv g_{12},$$
$$g_{14} \equiv g_{24} \equiv g_{34},$$
$$g_{15} \equiv g_{25} \equiv g_{35},$$
$$g_{16} \equiv g_{26} \equiv g_{36}.$$

Les autres droites de la surface S_3 sont encore des droites simples. Les trois cônes $1'$, $2'$, $3'$ sont tous tangents au plan $(1 = 2 = 3)$ suivant la même droite; cette droite est la limite vers laquelle tendent simultanément les trois droites d'intersection de ces trois plans. Les trois cônes $4'$, $5'$, $6'$ seront tangents, suivant cette même droite, et auront, de plus, le long de cette droite, même rayon de courbure. Avec les dix-huit droites, qui se sont réunies en six, on pourrait former trois double-six, qui auront deux à deux en commun six droites, trois de chaque sextuple. De tels double-six sont nommés voisins.

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, on voit que les six droites passent par un même point Q de la surface S_3. Ici, les six droites sont trois à trois dans deux plans. En effet, la droite qui est dans le plan des deux droites g_{14} et g_{25} est la droite g_{36}, qui coïncide avec la droite g_{16}; donc, les droites g_{14}, g_{15} et g_{16} sont dans un plan. De même, la droite qui est dans le plan des droites g_1 et $g'_1 = g'_2$ est la droite g_{12}; cette dernière coïncide avec la droite g_{23}, donc les droites g_1, g'_1 et g_{23} sont dans un plan. Le cône sur lequel se trouvent les six droites qui passent par le point Q est donc formé de deux plans; par suite, le point Q est un point biplanaire, B_3.

Pour que trois plans singuliers, passant par le point U, coïncident, il faut que le point U soit ou sur la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, ou bien sur une des six droites tangentes à la courbe $d_3(x_1, y_1, z_1)$ et qui rencontrent une des droites x_1, y_1 ou z_1. Dans les deux cas, les six droites qui passent par le point U sont réelles, puisque tous les plans singuliers qui passent par le point U sont réels.

§ 3. Si le point U est un des six points de contact des plans osculateurs à la courbe $d_3(x_1, y_1, z_1)$, passant par une des droites x_1, y_1 ou z_1, quatre plans singuliers passant par le point U coïncident, à savoir les trois plans β avec un des plans ξ, η, ζ.

Dans ce cas, les droites du tableau suivant, qui sont dans une même ligne horizontale, coïncident :

$$g_1 \equiv g_2 \equiv g_3 \equiv g_4,$$
$$g'_1 \equiv g'_2 \equiv g'_3 \equiv g'_4,$$
$$g_{15} \equiv g_{25} \equiv g_{35} \equiv g_{45},$$
$$g_{16} \equiv g_{26} \equiv g_{36} \equiv g_{46},$$
$$g_{12} \equiv g_{23} \equiv g_{34} \equiv g_{41} \equiv g_{42} \equiv g_{31}$$

Vingt-deux droites de la surface S_3 se réunissent en cinq droites. Ces cinq droites passent par un point Q. En effet, la droite g_{15} rencontre les droites g_1 et g'_1, et comme la droite qui est dans le plan de ces deux droites est la droite g_{12}, il faut que la droite g_{15} passe par le point de rencontre des droites g_1 et $g'_1 = g'_2$; de même, la droite g_{16} doit passer par ce point. La droite g_{12} rencontre les droites g_1 et $g'_1 = g'_2$, la droite g_{34} rencontre les deux droites g_{16} et g_{15}, donc la droite $g_{12} = g_{34}$ rencontre les quatre premières droites passant par le point Q. Elle doit donc passer par le point de rencontre Q de ces quatre droites. La dernière droite étant dans le plan des deux premières g_1 et g'_1 et dans le plan des deux suivantes g_{15} et g_{16}, doit être la droite d'intersection des deux plans passant par ces deux couples. Les cinq droites passant par le point Q sont donc dans deux plans qui se coupent suivant une droite de la surface S_3; Q est donc un point biplanaire B_4.

§ 4. α) Supposons que trois des plans singuliers passant par le point U se coupent en une droite l. Aux plans du faisceau (l), sauf les trois plans singuliers, il correspond toujours un même point Q, par lequel passent les trois droites correspondant aux trois plans singuliers. Par ce point, il passe encore trois autres droites, à savoir (si 4, 5 et 6 sont les trois plans passant par la droite l) les droites g_{12}, g_{23}, g_{31}. En effet, chacun des faisceaux (1, 2), (2, 3), (3, 1) contient un plan passant par la droite l; donc, la droite correspondante passe par le point Q. Les cônes 1′,

2', 3' sont décomposables chacun en deux faisceaux; le cône 1', par exemple, en les faisceaux (l) et (2, 3); par conséquent, la droite g_{23} coïncide avec la droite g'_1. Les droites g_{45}, g_{56}, g_{64} ont disparu. Il y a donc de nouveau un double-six, dont il ne reste que six droites passant par un point Q. Le double-six est le suivant :

$$g_{12},\ g_{23},\ g_{31},\ g_4,\ \ g_5,\ \ g_6;$$
$$g'_3,\ \ g'_1,\ \ g'_2,\ \ g_{56},\ g_{64},\ g_{45}.$$

Les autres droites de la surface S_3 ne passent pas par le point Q. Par un raisonnement analogue à celui employé dans le § 1, on voit que les six droites qui passent par le point Q sont sur un cône non décomposable, du second degré; Q est donc un point conique de la surface S_3.

Pour démontrer directement que Q est un point double de la surface S_3, considérons une droite p passant par le point Q. Comme au point Q de la droite p il correspond déjà un faisceau (l), aux autres points de la droite p il correspond un cône C_2, qui aura un plan commun avec le faisceau (l), autrement dit la droite l est tangente au cône C_2. Par le point U de la droite l, on ne peut donc mener qu'un seul plan tangent au cône qui ne contient pas la droite l; donc la droite p rencontre la surface S_3 en un seul point, différent du point Q; par conséquent, Q doit être un point double de la surface S_3. La droite p sera tangente en Q à la surface S_3, si le point U se trouve sur le cône C_2.

Pour que trois des plans singuliers du point U passent par une droite l, il faut que la droite l se trouve sur un des quatre hyperboloïdes qui sont le lieu des supports de faisceaux auxquels ne correspondent que des points.

Ce sont les hyperboloïdes $H_2(x_1, y_1, z_1)$, $H_2(x_1, y_1)$, $H_2(y_1, z_1)$, $H_2(z_1, x_1)$, auxquels correspondent la cubique $C_3(x, y, z)$ et les droites z, x et y. Si le point U est sur l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1, z_1)$, les trois plans qui passent par une droite sont les plans ξ, η et ζ; leur intersection commune est une droite a et le point conique Q de la surface S_3 est un point A de la cubique $c_3(x, y, z)$. Si le point U est, par exemple, sur l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$, ce sera

un des plans β qui passe par l'intersection des plans ξ et η; le point conique est sur la droite z.

Il est impossible que deux des plans β passent par une droite avec le plan ξ, par exemple. En effet, dans ce dernier plan, il se trouverait alors la droite x_1 et l'intersection des deux plans β; donc deux droites dans deux plans osculateurs de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ seraient dans un plan, ce qui est impossible. Trois plans β distincts ne peuvent pas passer par une droite, puisque les plans β sont des plans osculateurs d'une cubique gauche.

Dans les quatre positions que le point U peut occuper, les deux plans β ne passant pas par la droite l peuvent être imaginaires conjugués, par conséquent, parmi les six droites qui passent par le point U, deux peuvent être imaginaires conjuguées. Les quatre autres sont toujours réelles.

β) Le cas intermédiaire entre ceux où les six droites passant par le point Q sont toutes réelles et où quatre seulement sont réelles, se présentera lorsque le point U, tout en étant sur un des quatre hyperboloïdes, est en même temps sur la développable R_4. Alors deux des plans singuliers, passant par le point U, coïncident; il y a deux cas à considérer : 1° les deux plans qui coïncident ne passent pas par la droite l, et 2° un des trois plans qui passent par la droite l coïncide avec un quatrième plan. Considérons le premier cas et soient 1 et 2 les deux plans coïncidents; alors les droites g_{13} et g_{23} coïncident; donc par le point Q il passe seulement cinq droites. Dans le § 1, nous avons vu que cette droite g_{23} passe encore par un point conique de S_3; la surface S_3 aura donc dans ce cas deux points coniques. Dans le second cas, les deux plans β qui coïncident passent par la droite l. Par cette droite passent alors quatre plans, dont deux coïncident. Ce cas sera traité dans le § 5.

Pour les points d'intersection de l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1, z_1)$ avec la développable R_4, on est dans le premier cas. L'intersection d'un des autres hyperboloïdes avec la surface R_4 donne les deux cas. En effet, prenons comme exemple l'intersection de la surface R_4 avec l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$. Une génératrice l de cet hyperboloïde, de l'autre mode que x_1 et y_1, rencontre la

surface R_4 en quatre points dont deux coïncident avec la tangente à la cubique gauche $d_3(x_1, y_1, z_1)$, qui est dans le plan β_1 qui contient la droite l. Si le point U est sur cette tangente et sur la droite l, un des deux autres plans β coïncide avec le plan β_1; donc nous serons dans le second cas. Pour les deux autres points de rencontre de la génératrice l avec la surface R_4, les deux plans β qui coïncident sont distincts du plan β_1, et on se trouve dans le premier cas.

γ) Si le point U est sur l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1, z_1)$, les trois plans passant par la droite l sont toujours distincts; si le point U est sur un des trois autres hyperboloïdes, par exemple sur $H_2(x_1, y_1)$, il se peut que deux des plans singuliers, passant par la droite l, coïncident. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le point U se trouve sur une des quatre droites g de la surface $H_2(x_1, y_1)$, d'autre mode que x_1 et y_1, droites situées dans les quatre plans de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, menés par les droites x_1 et y_1. Supposons que 5 et 6 soient les plans qui coïncident; alors il y aura encore un double-six qui disparaît pour donner lieu à six droites concourantes :

$$g_6,\ g'_6,\ g_{51},\ g_{52},\ g_{53},\ g_{54},$$
$$g_5,\ g'_5,\ g_{61},\ g_{62},\ g_{63},\ g_{64}.$$

Puisque la droite $g_{54} = g_{64}$ n'existe plus, il s'ensuit que par le nouveau point singulier de la surface S_3, il passe seulement cinq droites; la droite qui unit les deux points coniques est la droite $g_6 = g_5$.

δ) Tout en restant sur une des quatre droites g, le point U peut encore être sur la surface R_4. Il y a de nouveau deux cas. 1° Les deux autres plans β coïncident; 2° il y a encore un plan β qui coïncide avec le plan β_1 passant par la droite g. Le premier cas se présentera lorsque le point U sera situé sur la conique qui fait partie de l'intersection de la surface R_4 avec le plan β, qui contient la droite g; le second cas se présentera lorsque le point U sera situé sur la tangente de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ dans ce plan β. Dans le premier cas, il y aura encore un point

conique sur la surface S_3. Si les plans coïncidents ne passant pas par la droite g sont les plans 1 et 2, les trois droites unissant les trois points coniques seront les droites

$$g_6 = g_5;\ g_{23} = g_{13} = g'_1 = g'_2, \quad \text{et} \quad g_{51} = g_{52} = g_{61} = g_{62}.$$

Dans le second cas, il passe par la droite g quatre plans, dont trois sont confondus.

Tâchons de faire coïncider encore un plan β avec le plan (yg); le point U doit se trouver alors sur la tangente à la courbe $d_3(x_1, y_1, z_1)$ qui est dans le plan (yg). Toutes les tangentes de la courbe $d_3(x_1, y_1, z_1)$ sont tangentes à la quadrique $H_2(x_1, y_1)$; chacune doit donc passer par le point de contact du plan β qui la contient, avec l'hyperboloïde. Le plan (yg) est tangent à l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$ au point de rencontre des droites y et g. La tangente de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, située dans le plan (yg), rencontre par conséquent la droite g au point où la droite g rencontre la droite y. Pour faire coïncider encore un plan β avec le plan (yg), il faut donc que le présent point U se trouve sur la droite y; c'est un cas que nous considérerons plus tard.

ε) Si le point U est sur l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1, z_1)$ et en même temps sur la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, les trois plans β coïncident, tandis que les plans ξ, η, ζ passent par une droite l; la surface S_3 aura un point conique et un point biplanaire B_3.

Si le point U est sur l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$ et sur une des tangentes de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, qui rencontrent la droite z_1, les plans ξ, η et un des plans β passent par une droite, et le plan ζ coïncide avec les deux autres plans β. La surface S_3 aura de nouveau un point conique et un point biplanaire B_3.

§ 5. α) L'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1, z_1)$ rencontre l'un quelconque des trois autres hyperboloïdes, par exemple $H_2(z_1, y_1)$, suivant les droites z_1 et y_1; ces hyperboloïdes ont donc encore deux droites a en commun. Ce sont les deux droites a qui sont dans les deux plans osculateurs de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ menés par la droite x_1. A ces deux droites a, il correspond deux

droites b, passant par les points A, où la courbe $c_3(x, y, z)$ rencontre la droite x. En effet, puisque, par les deux points Y_i et Z_i de a_i, il passe un plan osculateur de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$, les deux plans (yY_i) et (zZ_i) passent par une droite b_i, qui rencontre la droite x. Le point d'intersection des trois plans (xX_i), (yY_i), (zZ_i) est le point de rencontre des droites b_i et x; donc ce dernier point est un point de la cubique $c_3(x, y, z)$.

Supposons que le point U_i soit situé sur cette droite a_i; par cette droite, il passe les plans η, ζ et $\xi = \beta_1$. Représentons ces plans par les chiffres 6, 5, 4 et 3. Puisque les plans 6, 5 et 4 passent par une droite du double-six suivant :

$$\begin{matrix} g_{12}, & g_{23}, & g_{31}, & g_4, & g_5, & g_6, \\ g'_3, & g'_1, & g'_2, & g_{56}, & g_{64}, & g_{45}, \end{matrix}$$

il ne reste que six droites; de plus, puisque les plans 3 et 4 coïncident, les droites du double-six suivant :

$$\begin{matrix} g_{13}, & g_{23}, & g_{53}, & g_{63}, & g_4, & g'_4, \\ g_{14}, & g_{24}, & g_{54}, & g_{64}, & g_3, & g'_3, \end{matrix}$$

coïncident deux à deux et passent par un point. Ces deux double-six sont voisins; donc les six droites qui restent de l'un sont les mêmes que celles qui restent de l'autre. Les dix-huit droites écrites se réunissent donc en six droites passant par un point. Les droites seront, trois à trois, situées dans deux plans; en effet, les droites g_{13} et g_{24} sont dans un plan avec la droite g_{56}; donc les droites g_{13}, g_{23} et g_4 seront dans un plan; il en est de même des droites g_{12}, $g_5 = g_{63}$, $g_6 = g_{45}$.

Puisque la droite g'_4 coïncide avec la droite x et la droite $b_i = g_3$, le point de rencontre des six droites est le point A_i. La surface S_3 a donc au point A_i un point biplanaire B_3.

Dans le § 4, β, second cas, il y avait aussi une droite par laquelle passent quatre plans, dont deux coïncident. En faisant le même raisonnement que ci-dessus, on trouve que, dans ce cas encore, la surface S_3 aura un point biplanaire B_3.

Il est impossible que quatre plans singuliers, passant par le point U, passent par une droite l et soient distincts. En effet, si le cas pouvait se présenter, on a déjà vu que parmi ces quatre plans il y a au plus un plan β; les plans ξ, η et ζ seraient donc parmi les quatre plans. Évidemment, la droite l serait sur les quatre hyperboloïdes $H_2(x_1, y_1, z_1)$, $H_2(x_1, y_1)$, $H_2(y_1, z_1)$, $H_2(z_1, x_1)$ à la fois. Les hyperboloïdes $H_2(x_1, y_1, z_1)$ et $H_2(y_1, z_1)$ ont déjà en commun les quatre droites y_1, z_1 et les deux droites a considérées ci-dessus ; donc la droite l n'existe pas.

β) Tout en restant sur la droite a_i, le point U peut encore être sur la surface R_4. La section du plan $(a_i x_1)$ avec la surface R_4 consiste en une conique et une droite, qui doit compter double. Si le point est sur cette conique, les deux plans β, qui ne passent pas par la droite a_i, se confondent, et la surface S_3 aura, en dehors du point biplanaire A_i, un point conique.

Si le point U est situé sur la tangente à la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ dans le plan $(x_1 a_i)$, deux des plans β se confondent encore, mais cette fois un d'eux sera le plan $(x_1 a_i)$. Par la droite a_i passent donc les plans ζ, η, $\xi = \beta_3 = \beta_2$, ou bien les plans 6, 5 et $4 = 3 = 2$.

Nous avons vu que les droites d'une même ligne horizontale du tableau suivant se confondent en une seule :

$$g_{12} \equiv g_{13} \equiv g_{14},$$
$$g_{52} \equiv g_{53} \equiv g_{54},$$
$$g_{62} \equiv g_{63} \equiv g_{64},$$
$$g_2 \equiv g_3 \equiv g_4,$$
$$g'_2 \equiv g'_3 \equiv g'_4,$$
$$g_{34} \equiv g_{42} \equiv g_{23}.$$

Comme les plans 6, 5 et 4 passent par une droite, il y a encore un double-six qui disparait. De la considération de ce double-six, il ressort que les droites g_{12} et g'_2 se confondent; par conséquent, les deux plans qui contiennent chacun trois droites se coupent suivant une droite g_{12} de la surface. Le point A_i est donc, dans ce cas, un point biplanaire B_4.

§ 6. α) Le point U peut se trouver sur la courbe d'intersection de deux hyperboloïdes, tels que $H_2(x_1, y_1)$ et $H_2(y_1, z_1)$. Ces deux hyperboloïdes ont la droite y en commun; donc ils se coupent encore suivant une cubique gauche c_3. Si le point U est sur cette courbe c_3, il passe par ce point deux droites l_1 et l_2, par chacune desquelles il passe trois plans singuliers. Par l_1 il passe, par exemple, les plans ξ, η et β_1, et par la droite l_2 il passe les plans η, ζ et β_2. La surface S_3 aura deux points coniques, l'un sur la droite z et l'autre sur la droite x.

β) La cubique gauche c_3, courbe d'intersection des deux hyperboloïdes $H_2(x_1, y_1)$ et $H_2(y_1, z_1)$, rencontre l'hyperboloïde $H_2(z_1, x_1)$ en deux points non situés sur les droites z_1 et x_1. Si le point U est un de ces points de rencontre, les plans ζ, ξ et β_3 passent par une droite et la surface S_3 aura trois points coniques, situés respectivement sur les droites z, x et y.

γ) Si le point U est situé sur la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ et, par exemple, sur l'hyperboloïde $H_2(y_1, z_1)$, cinq plans singuliers passant par le point U se coupent en une droite et, de plus, trois de ces plans coïncident, à savoir les plans η, ζ, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$. C'est le cas traité dans le § 5, β, et la surface S_3 aura donc un point biplanaire B_4.

δ) Enfin, supposons que le point U soit situé sur une des droites x_1, y_1 ou z_1. Un des plans singuliers est alors indéterminé. La surface S_3 se décompose en un plan et une quadrique. En effet, si, par exemple, le point U est situé sur la droite x_1, le plan $(x\text{U})$ fait partie de la surface S_3, de même que l'hyperboloïde $H_2(y, z)$.

§ 7. Tâchons de prendre le point U tel que les six plans singuliers qui passent par ce point soient tangents à un même cône du second degré. Ce cas est le cas réciproque de celui où les six points singuliers situés dans un plan μ se trouvent sur une conique. En général, il est impossible de déterminer un plan tel que les six points singuliers qui s'y trouvent soient sur une conique.

Pour que ce fût possible, il faut que la cubique $C_3(x, y, z)$ et

les droites x, y, z soient situées sur une quadrique. En effet, un hyperboloïde $H_2(x, y)$ est uniquement déterminé par les lignes $c_3(x, y, z)$, x et y. Le plan μ de la conique c_2, sur laquelle se trouvent les six points singuliers, coupe l'hyperboloïde $H_2(x, y)$ suivant une conique c'_2 qui aura cinq points communs avec la conique c_2; donc ces deux coniques coïncident complètement. La droite z est une bisécante de la cubique $c_3(x, y, z)$ et a un point commun avec la conique c_2, donc avec la conique c'_2; elle a donc trois points communs avec l'hyperboloïde $H_2(x, y)$; par conséquent, elle y est tout entière.

Réciproquement, pour que les six plans singuliers passant par le point U soient tangents à un cône du second degré, il faut que la développable R_4 soit circonscrite à l'hyperboloïde déterminé par les trois droites x_1, y_1, z_1. Alors un plan osculateur de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ marque sur les droites x_1, y_1, z_1 des points qui sont sur une droite a. Les quatre hyperboloïdes $H_2(x_1, y_1, z_1)$, $H_2(x_1, y_1)$, $H_2(y_1, z_1)$, $H_2(z_1, x_1)$ ne font qu'un seul. Aux plans passant par une droite a correspondent les points d'une droite b. La cubique $c_3(x, y, z)$ n'existe plus, mais est devenue l'hyperboloïde $H_2(x, y, z)$. Aux points d'une droite b correspondent tous les plans d'une droite a; donc la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ est devenue l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1, z_1)$. Par chaque point U il passe une infinité de plans singuliers, qui forment un cône du second degré. Dans un plan μ quelconque se trouvent une infinité de points singuliers, qui forment une conique. Aux plans singuliers, passant par le point U, il correspond l'hyperboloïde $H_2(x, y, z)$; la surface S_3 se décompose donc en cet hyperboloïde et un plan.

On peut démontrer comme il suit que tous les points correspondant aux plans non singuliers qui passent par le point U, sont dans un plan. Par une droite quelconque l, qui contient le point U, il passe deux plans singuliers; donc aux autres plans de la droite l il correspond des points en ligne droite g. Deux droites l_1 et l_2 passant par le point U ont un plan commun; donc leurs droites correspondantes g_1 et g_2 ont un point commun. Toutes les droites g de la surface S_3 correspondant aux droites l

issues du point U se rencontrent, et comme elles ne passent pas toutes par un point, les droites l n'étant pas toutes dans un plan, il faut que les droites g de la surface S_3 soient dans un plan.

En résumé, les six plans singuliers passant par le point U ne peuvent pas être tangents à un cône du second degré si les six éléments x, y, z, x_1, y_1, z_1 sont arbitraires. Ils sont tangents à un cône du second degré si à chaque droite a il correspond une droite b, et alors il y a par le point U une infinité de plans singuliers, qui enveloppent un cône du second degré. Dans ce cas, la surface S_3 se décompose pour chaque position du point U, en l'hyperboloïde $H_2(x, y, z)$ et en un plan.

§ 8. Il y a encore, par un choix convenable du point U sur la surface S_3, d'autres points singuliers, à savoir ceux par lesquels il passe trois droites dans un plan, qui est plan tangent ordinaire, et tel que chaque droite, qui passe par le point de contact rencontre la surface S_3 encore en deux points. La surface S_3 aura un tel point si, par exemple, les droites g_{1x}, g_{2y}, g_{3z}, qui sont dans un plan, concourent en un point. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les droites l_{1x}, l_{2y}, l_{3z}, soient dans un plan.

CHAPITRE III.

§ 1. α. Prenons les éléments de telle sorte, que la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ se décompose en un faisceau et un cône du second degré. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit, si les droites x, y, z, x_1 et y_1 sont données en position, d'effectuer les constructions suivantes : menons une droite b_1, qui rencontre les droites x, y, z; les deux plans (b_1x) et (b_1y) rencontrent les droites x_1 et y_1 respectivement aux points X_1 et Y_1; la droite $a_1 = \overline{X_1Y_1}$ rencontre le plan (b_1z) en un point Z_1; si la droite z_1 passe par le point Z_1, le faisceau a_1 fera partie de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$; donc cette cubique se décompose en ce faisceau (a_1) et un cône d_2, du second degré, qui a un plan commun avec le faisceau (a_1) et avec les trois faisceaux (x_1), (y_1) et (z_1); autrement dit, les droites a_1, x_1, y_1 et z_1 sont des tangentes au cône d_2. La cubique $c_3(x, y, z)$ se décompose aussi en une conique $c_2(x, y, z)$ et la droite b_1.

Soit maintenant le point U sur la droite a_1, alors la surface S_3 sera réglée et aura la droite b_1 pour droite double. En effet, aux points d'une droite l quelconque, qui rencontre la droite b_1, il correspond le faisceau (a_1) et un cône du second degré, qui touche la droite a_1; ainsi, par le point U il passe un seul plan tangent de ce cône, qui ne contient pas la droite a_1; par conséquent, la droite l rencontre la surface S_3 en un seul point, non situé sur la droite b_1; donc chaque point de la droite b_1 est un point double et b_1 est une droite double. Soit β_3 le plan tangent mené du point U au cône d_2, qui ne contient pas la droite a_1; et soit b_3 la droite correspondante de la surface S_3. A chaque droite l située dans ce plan β_3, considérée comme axe, il correspond une droite g de la surface S_3, qui rencontre les droites b_1 et b_3, puisqu'il passe par la droite l les deux plans singuliers β_3 et (a_1l). Il s'ensuit que S_3 est une surface réglée.

Chaque droite l rencontre une droite a, distincte de a_1; donc chaque droite g rencontre la conique $c_2(x, y, z)$. Inversement, chaque droite g qui rencontre la droite b_1 (ce qui compte pour deux points d'intersections avec S_3) la droite b_3 et la conique $c_2(x, y, z)$ a quatre points communs avec la surface S_3, donc, elle fait partie de cette surface. Puisque la droite b_1 rencontre la conique $c_2(x, y, z)$, chaque plan mené par la droite b_1 rencontre cette conique et la droite b_3, chacune en un point et la droite de jonction de ces deux points de rencontre donne une seule droite de la surface S_3, située dans chaque plan mené par la droite b_1.

Puisque chaque plan mené par la droite b_3 rencontre la conique $c_2(x, y, z)$ en deux points et la droite b_1 en un seul point, il s'ensuit que dans chaque plan passant par la droite b_3 il se trouve deux droites de la surface S_3, qui se rencontrent sur la droite b_1. Ces deux droites coïncident, si le plan mené par la droite b_3 est tangent à la conique, ce qui a lieu deux fois; donc sur la droite double b_1 se trouvent deux points *pince*.

β) Ces deux points *pince* sur la droite b_1 coïncident, si la droite b_3 rencontre la conique $c_2(x, y, z)$; cette conique a déjà quatre points communs avec l'hyperboloïde $H_2(x, y, z)$, car elle rencontre les droites b_1, x, y et z; donc la droite b_3 ne peut rencontrer la conique $c_2(x, y, z)$ que si elle coïncide avec la droite b_1; c'est ce qui a lieu si le point U se trouve au point où la droite a_1 touche le cône d_2, ou bien encore si la droite b_3 passe par un des trois points où la conique $c_2(x, y, z)$ rencontre les droites x, y, z. Dans ces trois derniers cas, le point U coïncide avec un des points X_1, Y_1, Z_1; donc la surface S_3 se décompose. Si les droites b_1 et b_3 coïncident, les deux directrices de la surface S_3 coïncident, et la surface devient une surface de Cayley. Sur la droite a_1 se trouvent ainsi déterminés quatre segments, et aussi longtemps que le point U se trouve dans deux de ces segments non consécutifs, les deux points *pince* restent imaginaires; si le point se trouve sur un des deux autres segments, ces points sont réels.

γ) Si U est le sommet du cône d_2, tous les plans tangents de ce cône passent par le point U; donc toutes les droites b sont

situées sur la surface S_3; la surface S_3 se décompose alors en l'hyperboloïde $H_2(x, y, z)$ et un plan.

Si le point U se trouve sur le cône d_2, ou bien sur un des plans tangents au cône d_2, menés par une des droites x_1, y_1, z_1 ou a_I, ou sur une des arètes suivant lesquelles ces plans touchent le cône d_2, la surface S_3 aura, de même que dans le cas où la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ ne serait pas décomposable, un point conique ou un point biplanaire B_3, etc.

δ) Au lieu de mener la droite z_1 arbitrairement par le point Z_I, on peut la faire passer par un point analogue, Z_{II}, correspondant à une seconde droite b_{II}; la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ se décompose en les deux faisceaux (a_I) et (a_{II}) et en un troisième (d_1); la droite d_1 rencontre les droites a_I et a_{II}. Supposons que le point U soit situé sur la droite a_I; toutes les droites l qui passent par le point U et rencontrent la droite a_{II} sont des axes de faisceaux, auxquels correspondent des droites g de la surface S_3, rencontrant les deux droites directrices b_I et b_{II}. Si le point U est sur la droite d_I, la surface S_3 se décompose en l'hyperboloïde $H_2(x, y, z)$ et en un plan. La surface S_3 ne peut pas devenir une surface de Cayley.

ε) Supposons que les droites x, y, z, x_1 et y_1 soient encore données en position; une droite b_i détermine sur les droites x_1 et y_1 par les plans (xb_i) et (yb_i) les points X_i et Y_i. Le lieu des intersections de la droite $\overline{X_iY_i}$ avec le plan (zb_i) est une cubique c_3, dont les droites z, x_1 et y_1 sont des bisécantes. Si l'on prend pour droite z_1 une tangente à cette cubique c_3, la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ se décompose en le faisceau $(\overline{X_IY_I})$, qui passe par le point de contact Z_I, faisceau qui compte double, et en un faisceau (d_I). Si le point U est situé sur la droite $\overline{X_IY_IZ_I}$, la surface S_3 sera une surface de Cayley.

ζ) Si la droite z_1 est sur l'hyperboloïde formé par les droites $\overline{X_iY_i}$, la droite z_1 est une bisécante de la cubique c_3, considérée dans (ε); nous sommes donc ramenés au cas (δ) avec la singularité en plus que la droite c_1, qui, avec les droites b_I et b_{II}, forme la cubique $c_3(x, y, z)$, coïncide avec la droite z, tandis que la droite d_1 coïncide avec la droite z_1.

η) Pour obtenir un conoïde droit, il faut prendre les droites x, y et z telles que ces trois droites admettent une perpendiculaire commune; alors elles sont parallèles à un plan, de manière que la surface $H_2(x, y, z)$ devient un paraboloïde hyperbolique; pour droite b_I il faut prendre la droite qui coupe les droites x, y et z à angle droit, et prendre le point U sur la droite a_I de manière que la droite b_3 soit la droite b qui est à l'infini.

§ 2. α) Supposons données les droites x_1, y_1, z_1, z et les droites x et y, qui coïncident; soit le point U arbitraire. Dans chaque plan passant par la droite $\overline{xy}$ il se trouve encore une droite de la surface S_3, et cette droite forme avec la droite $\overline{xy}$ l'intersection complète de la surface S_3 avec ce plan; $\overline{xy}$ est donc une droite double de la surface S_3. Dans chaque plan passant par la droite z il se trouve, en plus de z, deux droites de la surface S_3. En effet, les plans passant par la droite $\overline{xy}$ déterminent sur les droites x_1 et y_1 deux ponctuelles projectives; les droites qui joignent deux points correspondants, décrivent un hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$. A chaque plan π_i tangent à cette quadrique il correspond une droite d_i, qui rencontre les deux droites $\overline{xy}$ et z, et aux autres plans de l'espace il correspond des points de la droite $\overline{xy}$. Un plan passant par la droite z détermine sur la droite z_1 un point Z_i. Par la droite $\overline{UZ_i}$, on peut mener deux plans Π_i, tangents à l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$; à chacun de ces plans tangents il correspond un plan du faisceau $(\overline{xy})$ qui coupe le plan (zZ_i) en une droite appartenant à la surface S_3. Donc, dans chaque plan passant par la droite z il se trouve, outre la droite z, deux droites qui se coupent au point d'intersection du plan avec la droite $\overline{xy}$. On voit ainsi que par chaque point de la droite $\overline{xy}$ il passe deux droites de la surface S_3, qui rencontrent la droite z; $\overline{xy}$ est donc bien une droite double et la droite z est l'axe d'un faisceau de plans bitangents.

Cherchons les points de la droite $\overline{xy}$ pour lesquels les deux droites qui y passent se confondent. Le plan du faisceau (z) passant par un tel point rencontre la surface S_3 en deux droites coïncidentes; donc les deux plans tangents à l'hyperboloïde

$H_2(x_1, y_1)$ menés par la droite $\overline{UZ_i}$ doivent coïncider; de là il suit que la droite $\overline{UZ_i}$ doit être tangente à l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$; par conséquent, le point Z_i doit être un des deux points de rencontre de la droite z_1 avec le cône tangent à l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$, qui a le point U pour sommet. Sur la droite $\overline{xy}$ il y a donc deux points réels, imaginaires ou coïncidents, tels qu'en chacun de ces points les deux droites qui y passent coïncident, ce qui donne trois espèces de surfaces réglées. Si la droite z_1 est tangente au cône tangent de l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$ mené par le point U, le plan (zU) est tangent à l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$; donc le point U doit se trouver dans un des deux plans passant par la droite z_1, tangents à l'hyperboloïde, pour avoir une surface réglée où les deux points *pince* sur la droite $\overline{xy}$ coïncident.

β) Je dis que, si le point U se trouve dans un de ces deux plans tangents, la surface S_3 se décompose en le plan passant par la droite $\overline{xy}$, qui correspond au plan (z_1U), tangent à l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$ et en un autre hyperboloïde.

De même, il y a décomposition de la surface S_3 si la droite z_1 est tangente à l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$ et si, de plus, le point U se trouve dans le plan tangent à cette quadrique, mené par la droite z_1.

γ) Les deux points de rencontre de la droite z_1 avec le cône tangent se confondent encore si ce cône tangent se décompose en deux plans coïncidents, donc si le point U est sur la surface $H_2(x_1, y_1)$. Dans ce cas encore, la surface S_3 se décompose, puisque maintenant le plan du faisceau $(\overline{xy})$ qui passe par le point U fait partie de la surface S_3.

Si la droite z_1 est sur l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$, la droite z_1 est encore tangente au cône tangent. La surface S_3 se décompose en le plan du faisceau $(\overline{xy})$ correspondant au plan $\pi_i = (z_1U)$ et un hyperboloïde.

Il n'y a donc pas moyen de faire coïncider les deux points singuliers sur la droite $\overline{xy}$.

Pour obtenir un conoïde droit, il suffit que la droite z soit à l'infini et perpendiculaire à la droite $\overline{xy}$.

δ) Si les trois droites x, y et z coïncident, la surface S_3 se décompose en trois plans passant par cette droite. En effet, à chaque plan passant par la droite $\overline{xyz}$ correspondent trois points X_i, Y_i, Z_i, qui sont les intersections avec les droites x_1, y_1 et z_1. Le lieu des plans $(X_iY_iZ_i)$ est une cubique gauche; par le point U il passe donc trois de ces plans et à chacun de ces plans il correspond un plan du faisceau $(\overline{xyz})$.

§ 3. α) Soient les droites x_1, y_1, z_1 et z arbitraires, et supposons que les droites x et y passent par un point A.

Les droites b, qui rencontrent les droites x, y et z, se divisent en deux faisceaux; l'un de ces faisceaux est formé par les droites qui rencontrent la droite z et passent par le point A; l'autre faisceau est formé des droites qui se trouvent dans le plan (xy) et passent par le point B, B étant le point de rencontre du plan (xy) avec la droite z. A ce dernier faisceau il correspond le faisceau de plans passant par les deux points X_I et Y_I, ces points étant les points de rencontre des droites x_1 et y_1 avec le plan (xy). Au faisceau de centre A il correspond un cône du second degré $d_2(x_1, y_1, z_1)$, et comme les droites sont toutes dans un même plan, passant par la droite z, les plans correspondants passent tous par un même point Z_2, dans le plan (Az). Le faisceau $(\overline{X_IY_I})$ et le cône $d_2(x_1, y_1, z_1)$ ont en commun le plan correspondant à la droite $\overline{AB}$, qui fait partie des deux faisceaux à la fois. Les plans (y_1Z_2) et (x_1Z_2) sont tangents au cône $d_2(x_1, y_1, z_1)$. Un plan quelconque π passant par le point Z_2 donne pour point correspondant le point A. Comme il passe par le point Z_2 une droite a, le point A est sur la cubique $c_3(x, y, z)$. Aux points de la droite x il correspond les plans passant par le point Y_I; aux points de la droite y il correspond des plans passant par le point X_I, de telle façon que les plans issus du point Y_I qui passent par un même point Z_i de la droite z_1, donnent un même point de la droite x.

Prenons le point U quelconque. Parmi les six plans singuliers, trois passent par la droite $\overline{UZ_I}$, à savoir les plans ζ, β_2 et β_3; les droites correspondantes passent donc par le point A. Le fais-

ceau (l_{1z}) donne la droite g_{1z}, qui coïncide avec la droite y, puisque ces plans passent par toutes les droites (X_1Z_i); de même g_{1y} coïncide avec la droite x, et la droite l_1 coïncide avec la droite g_{xy}. Par la droite l_{xy} il passe un plan ordinaire, qui contient le point z_2, donc la droite g_{xy} passe par le point A. Par le point A il passe donc six droites de la surface S_3. A une droite g_1, passant par le point A, il correspond les plans passant par le point z_2 et les plans passant par une droite l : cette droite l rencontre les droites x_1 et y_1 aux points d'intersection de ces deux droites respectivement avec les plans (lx) et (ly). Comme par le point U il passe un seul plan du faisceau (l), la droite g rencontre la surface S_3 encore en un seul point différent du point A. Ceci démontre de nouveau que le point A est un point double de la surface S_3. Les trois points de rencontre de la droite g avec la surface S_3 se réunissent en A, si le plan (Ul) passe par le point z_2; donc les droites tangentes en A à la surface S_3 correspondent aux faisceaux (l), dont les axes l rencontrent les droites x_1, y_1 et $\overline{UZ_2}$. Les faisceaux (l) constituent ainsi les plans tangents d'un hyperboloïde $H'_2(x_1, y_1)$, qui contient les droites x_1 et y_1; les points correspondant à ces plans tangents se trouvent, par conséquent [§ 6], sur une surface du second degré ; donc les droites tangentes en A à la surface S_3, forment un cône du second degré. Les plans ζ, β_2 et β_3, passant par la droite $\overline{UZ_2}$, sont des plans tangents de l'hyperboloïde $H'_2(x_1, y_1)$; donc leurs droites correspondantes sont sur le cône tangent. Par la construction même du cône tangent, on voit que les droites x et y en sont des génératrices, et comme la droite l_{xy} est une droite l, la sixième droite passant par le point A est aussi située tout entière sur le cône tangent.

β) Supposons maintenant que le point U soit situé dans le plan (x_1Z_2); alors les plans β_2 et ζ coïncident et l'hyperboloïde formé par les droites l se décompose en deux faisceaux plans de droites; l'un est dans le plan (x_1Z_2) et a pour centre le point de rencontre Y_3 de la droite y_1 avec ce plan; les droites de l'autre faisceau rencontrent toutes la droite y_1 et passent par le point de

rencontre X_2 des deux droites x_1 et $\overline{UZ_2}$. Le cône tangent en A se décompose en les deux plans (xX_2) et (yY_3). Dans le plan (yY_3) se trouvent les droites $y, g_{xy} = g_{2y} = t_1$, puisque la droite lxy passe par le point Y_3 et la droite $b_x = b_2$. Dans le plan (xX_2) se trouvent les droites x, b_3 et b_z de la surface S_3. A est un point biplanaire B_3.

γ) La droite d'intersection des deux plans tangents correspond au faisceau $(\overline{X_2Y_3})$; cette droite sera située sur la surface S_3, si le point U est sur la droite $\overline{X_2Y_3}$, donc si le point U se trouve sur la droite a qui passe par le point Z_2. Dans ce cas, les deux couples de plans suivants coïncident; $\eta \equiv \beta_3$; $\xi \equiv \beta_2$, et les plans ξ, η, ζ, β_2 et β_3 passent par une droite. A sera maintenant un point biplanaire B_4; les droites b_z et g_{yx} coïncident en une seule, qui est la droite d'intersection des deux plans tangents.

On peut prendre les éléments de telle sorte que le point Y_3 coïncide avec le point Y_1, tandis que les points X_2 et X_1 sont différents. Pour qu'il en soit ainsi, il faut prendre, si on se donne les droites x et y dans un plan et les droites z, y_1 et z_1, arbitraires, la droite x_1 telle qu'elle rencontre la droite Y_1Z_2. Prenons le point U sur la droite a passant par les points Y_1 et Z_2. Les deux plans tangents en A étant les plans (xX_2) et (yY_1) sont distincts. La droite b_z, qui est la droite d'intersection des deux plans tangents, coïncide avec la droite x.

Le plan (xy) est un des plans tangents en A; dans ce plan se trouve encore la droite $b_x = \overline{AB}$.

L'autre plan tangent est le plan (xX_2); dans ce plan se trouvent les droites b_y et $b_z = x$. Toute droite située dans ce dernier plan rencontre la surface S_3 en deux points coïncidents, situés sur la droite x; donc ce plan est tangent tout le long de la droite x : le point A est alors un point biplanaire B_5.

Dans ce cas, il passe par la droite a six plans singuliers, à savoir ζ, $\eta = \beta_3$, $\xi = \beta_2 = \beta_1$.

Si la droite $\overline{UZ_2}$ passe par le point X_1, un des deux plans tangents en A sera le plan (xy); l'autre plan tangent sera le plan (yY_3); donc, encore dans ce cas, A est un point bipla-

naire B_4. Dans ce cas, les deux couples de plans suivants coïncident deux à deux β_1 avec β_3 et β_2 avec ξ.

δ) Si le point U se trouve dans le plan $(Z_2X_1Y_1)$, c'est-à-dire dans le plan du faisceau (X_1Y_1), qui est tangent au cône $d_2(x_1, y_1, z_1)$, les plans β_3 et β_1 coïncident et les plans β_1, β_2, β_3, ξ passent par une droite. Dans ce cas, la droite $\overline{AB}$ est la droite $b_1 \equiv b_3$; cette droite est dans le plan (xy); le cône tangent en A doit donc se décomposer en le plan (xy) et un autre plan. La droite $\overline{X_1Y_1}$ est maintenant une droite l de l'hyperboloïde $H_2'(x_1, y_1)$, qui correspond au cône tangent en A. Au faisceau $\overline{(X_1Y_1)}$ correspond le plan (xy), qui fait donc partie du cône tangent. Le point A est donc un point biplanaire B_3 de la surface S_3.

ε) Revenons au cas considéré § 3, β; pour que les deux plans tangents (xX_2), (yY_3) coïncident, il faut que le point X_2 coïncide avec le point x_1 et le point Y_3 avec le point Y_1. Ceci est possible; en effet, prenons les droites x et y dans un plan; et soient les droites z, x_1 et y_1 arbitraires : la droite $\overline{X_1Y_1}$ est déterminée par ces données; il en est de même des plans (x_1Y_1) et (zA); les seules conditions à satisfaire sont que la droite z_1 rencontre l'intersection de ces deux derniers plans, et que le point U soit sur la droite $\overline{Z_2X_1}$. La droite de contact du plan $Z_2X_IY_I$ avec le cône d_2 est maintenant la droite $\overline{Z_2X_IU}$; des cinq plans β_1, β_2, β_3, ξ et ζ qui passent par la droite $\overline{Uz_2}$, les quatre plans β_1, β_2, β_3, ξ coïncident. Par le point A il ne passe que trois droites de la surface S_3, qui sont dans un plan, à savoir les droites x, y et AB; le point A est toujours un point double; c'est donc un point uniplanaire; les trois droites dans le plan tangent étant réelles et distinctes, A est un point uniplanaire U_6.

§ 4. α) Supposons que la droite x rencontre la droite y au point A, tandis que la droite z rencontre la droite y au point B, et soient les droites x_1, y_1, et z_1 arbitraires. Désignons par X_I et Y_I les points où les droites x_1 et y_1 rencontrent le plan (xy) et par Y_{II} et Z_{II} les points où les droites y_1 et z_1 rencontrent le plan (yz). La cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ se décompose en trois fais-

ceaux de plans $\overline{(X_I Y_I)}$, $\overline{(Y_{II} Z_{II})}$ et $\overline{(Z_{II} X_I)}$. Comme au paragraphe précédent, on vérifie les résultats suivants :

Quand le point U est pris tout à fait arbitraire, la surface S_3 aura deux points coniques aux points A et B.

Si le point U se trouve dans le plan $(z_1 Y_{II})$, la surface S_3 a encore un point conique sur la droite z.

Si le plan U se trouve dans le plan $(x_1 Y_I)$, la surface S_3 a encore un point conique sur la droite x.

Si le point U est situé sur la droite d'intersection des deux plans $(z_1 Y_{II})$ et $(x_1 Y_I)$, la surface S_3 possède quatre points coniques.

Si le point U se trouve dans le plan $(y Z_{II})$, le point A est un point biplanaire B_3.

Si le point U se trouve dans le plan $(y X_I)$, le point B est un plan biplanaire B_3.

Si le point U est situé sur la droite $\overline{X_I Z_{II}}$, la surface S_3 est une surface réglée dont la droite y est la droite double.

Si le point U se trouve dans le plan $(z_1 X_I)$, la surface S_3 a un point biplanaire B_3 au point B.

Si le point U se trouve dans le plan $(x_1 Z_{II})$, la surface S_3 a un point biplanaire au point A.

Si le point U se trouve dans le plan $(Z_{II} Y_{II} X_I)$, le point B est un point biplanaire B_3 de la surface S_3.

Si le point U se trouve dans le plan $(X_I Y_I Z_{II})$, le point A est un point biplanaire B_3 de la surface S_3.

Si le point U se trouve sur une génératrice a de l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1, z_1)$, la surface S_3 possède encore un point conique situé sur la cubique $c_3(x, y, z)$.

Si le point U se trouve sur la droite a qui passe par le point Z_{II}, le point A est un point biplanaire B_4 de la surface S_3.

Si le point U se trouve sur la droite a qui passe par le point X_I, le point A est un point biplanaire B_4 de la surface S_3.

Si le point U se trouve sur la droite a qui passe par le point Y_{II}, le deuxième point de rencontre de la droite Z avec la cubique $c_3(x, y, z)$ est un point biplanaire B_3 de la surface S_3.

Si le point U se trouve sur la droite a qui passe par le point Y_I,

le deuxième point de rencontre de la droite x avec la cubique $c_3(x, y, z)$ est un point biplanaire B_3 de la surface S_3.

β) On peut toujours choisir la droite y_1 de manière qu'elle rencontre la droite $\overline{X_I Z_{II}}$.

Si le point U est situé dans le plan $(y_1 Z_{II} X_I)$, les plans β_1, β_2, β_3 et η coïncident; la surface S_3 est une surface réglée dont y est la droite double et la droite g_{xz} l'axe des faisceaux des plans bitangents.

Si le point U se trouve sur la droite $\overline{X_I Z_{II}}$, la surface S_3 est une *surface de Cayley*.

§ 5. α) Supposons que les droites x, y et z soient dans un plan. Désignons par X_1, Y_1 et Z_1 les points de rencontre des droites x_1, y_1, z_1 avec le plan (xyz), et soient X, Y et Z les sommets du triangle formé par les droites x, y et z, de manière que le point Z est l'intersection des droites x et y. La cubique $c_3(x, y, z)$ passe par les points X, Y et Z. Chaque droite dans le plan (x, y, z) est une droite b, et aux points d'une droite b il correspond toujours le plan (x, y, z). La cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ est remplacée par l'ensemble des trois faisceaux $(\overline{X_1 Y_1})$, $(\overline{Y_1 Z_1})$ et $(\overline{Z_1 X_1})$; à un plan du premier faisceau, par exemple, il correspond la droite z. Par un point quelconque U il passe donc encore six plans singuliers, à savoir : les plans $(x_1 U)$, $(y_1 U)$, $(z_1 U)$, $(X_1 Y_1 U)$, $(Y_1 Z_1 U)$, $(Z_1 X_1 U)$, qui passent trois à trois par les trois droites $\overline{UX_1}$, $\overline{UY_1}$, $\overline{UZ_1}$.

Les trois points X, Y, Z sont des points coniques de la surface S_3. Prenons comme exemple le point Z; à une droite g passant par le point Z il correspond un faisceau (h) dont l'axe h passe par les points de rencontre des droites x_1 et y_1, respectivement avec les plans (xg), (yg). Du faisceau (h) il passe en général un plan par le point U; donc la droite g rencontre la surface S_3 en un point différent du point Z; par conséquent, Z est un point double de la surface S_3. Par le point Z, il passe encore les droites g_{xy} et b_z. Pour que la droite g soit une tangente à la surface S_3 au point Z, il faut que le plan (Uh) passe par le point Z_1; et réciproquement, aux faisceaux (h), tels que l'axe h ren-

contre la droite $\overline{UZ_1}$, il correspond les droites tangentes en Z à la surface S_3. Ces droites h decrivent une quadrique qui contient les droites x_1 et y_1; le lieu des points correspondant à ses plans tangents est donc une quadrique qui passe par les droites x et y. Les droites tangentes en Z forment donc un cône du second degré, passant par les droites x, y, et en outre, comme on le voit facilement, par les droites b_x et g_{xy}. En général, ce cône ne sera pas décomposable en deux plans. En effet, ces deux plans doivent contenir les deux droites x et y; si un plan tangent les contenait toutes les deux, chaque tangente dans ce plan rencontrerait la surface S_3 en quatre points, puisqu'elle rencontre encore la droite z; donc la surface serait décomposable. Si donc le cône tangent se décompose, ce doit être en deux plans dont l'un contient la droite x et l'autre la droite y. Aux points d'un plan passant par la droite x il correspond des plans passant par un point fixe de la droite x_1; pour que, par un point de la droite x_1, il passe une infinité de droites de l'hyperboloïde $H_2(x_1, y_1)$, il faut que cet hyperboloïde soit décomposable. L'hyperboloïde se décompose lorsque deux des trois directrices se rencontrent; si donc les droites x_1, y_1 et le point U sont arbitraires, le point Z sera un point conique. La surface S_3 aura donc trois points coniques, X, Y et Z.

β) Prenons le point U de telle manière que la droite $\overline{UZ_1}$ rencontre la droite y_1; le point Z est maintenant un point biplanaire; en effet, les droites h qui rencontrent les trois droites x_1, y_1 et $\overline{UZ_1}$ forment deux faisceaux de droites plans : l'un a pour centre le point de rencontre Y_2 des deux droites y_1 et $\overline{UZ_2}$, et son plan est le plan (xY_2); l'autre faisceau a pour centre le point de rencontre X_3 de la droite x_1 avec le plan (yU). Aux droites du premier faisceau, considérées comme étant des axes, il correspond des droites tangentes en Z dans le plan (yY_2); aux droites du second faisceau il correspond les droites passant par Z, dans le plan (xX_3). Le point Z sera donc un point biplanaire B_3; les deux autres points doubles X et Y sont encore des points coniques. Au faisceau $(\overline{X_3Y_2})$ il correspond la droite d'intersection des deux plans tangents en Z. Si donc les trois points U, Y_2

et X_3 sont en ligne droite, le point Z sera un point biplanaire B_4. La droite $\overline{UZ_1}$ est alors une droite a. Nous sommes arrivés, ainsi, au résultat suivant :

Si le point U se trouve sur une des trois droites a qui passent par un des trois points X_1, Y_1 ou Z_1, la surface S_3 aura un point biplanaire B_4, et deux points coniques. Puisque les droites a ne se rencontrent pas, il n'y a pas de surface S_3 avec deux points biplanaires B_4 et un point conique.

Si le point U se trouve sur la droite d'intersection des deux plans (Z_1, y)et (Y_1, x), les points Z et Y seront des points biplanaires B_3; si le point U est l'intersection de cette droite avec le plan (X_1, z), les points X, Y et Z seront des points biplanaires B_3.

γ) Supposons que le point U se trouve sur une droite a; le point A, correspondant à ce faisceau (a), de la cubique $c_3(x, y, z)$, sera un point conique de la surface S_3. En effet, par le point A il passe les trois droites de la surface $\overline{AX} = b_x$, $\overline{AY} = b_y$ et $\overline{AZ} = b_z$. Ces trois droites ne sont pas dans un plan; puisque le point A est seulement dans le plan (XYZ), si la droite a passe par un des points X_1, Y_1 ou Z_1; A n'est donc pas un point uniplanaire; A n'est pas non plus un point biplanaire, puisque alors un des plans tangents, au moins, devrait contenir deux des droites b_x, b_y ou b_z, donc aussi une des droites x, y ou z, et ferait alors partie tout entière de la surface S_3. A est donc un point conique, et la surface S_3 aura quatre points coniques.

§ 6. α) Supposons que les droites x, y et z passent par un point Q. A un plan quelconque π il correspond, en général, le point Q. Si les trois plans des faisceaux (x), (y) et (z), correspondant à un plan π, ont un point commun, hors du point Q, ces trois plans ont une droite commune qui passe par le point Q. La surface S_3 sera donc un cône.

Les plans π, qui donnent des droites du cône S_3, enveloppent un cône de la troisième classe. En effet, soit l une droite passant par le point U; les plans du faisceau (l) déterminent sur les droites x_1, y_1 et z_1 trois ponctuelles projectives; les trois faisceaux de plans (x), (y) et (z) correspondants seront donc aussi

projectifs. Le lieu des intersections de deux plans homologues des deux faisceaux (x) et (y) sera un cône du second degré; de même, pour les deux faisceaux (y) et (z). Ces deux cônes se coupent suivant quatre droites, dont l'une est la droite y. Les trois autres droites seront des droites du cône S_3, par conséquent par la droite l il passe trois plans π, qui donnent des droites du cône S_3.

β) La cubique $c_3(x, y, z)$ s'est décomposée en trois droites l_1, l_2, l_3; à une droite a quelconque, il correspond le point Q, mais il y a trois droites spéciales a_1, a_2, a_3 à chacune desquelles il correspond une des droites l_1, l_2, l_3. Supposons que le point U soit sur une des droites a_1, a_2, a_3 : sur a_1 par exemple. Le cône enveloppe des plans π, qui donnent des droites du cône S_3, se décompose en le faisceau (a_1) et en un cône du second degré Σ_2. Comme il y a deux plans tangents du cône Σ_2 qui passent par la droite a_1, on voit que si on fait décrire le cône Σ_2 par le plan π, ce plan passe deux fois par la droite a_1; donc la droite correspondant au plan π passera deux fois par la droite l_1, correspondant au faisceau (a_1). Par conséquent, la droite l_1 est une droite double du cône.

La droite l_1 sera une droite double proprement dite, une droite de rebroussement ou une droite isolée, si par la droite a_1 on peut mener deux plans tangents réels, coïncidents ou imaginaires au cône Σ_2.

Pour démontrer autrement que la droite l_1 est une droite double du cône S_3, menons un plan arbitraire X par le point Q et, dans ce plan, considérons le faisceau de droites g qui a pour centre le point Q. A une droite g de ce faisceau il correspond un plan π; si g décrit le faisceau, les plans π enveloppent une cubique gauche. Il passe trois plans osculateurs de cette cubique par le point U; donc, dans le plan X il y a trois droites du cône S_3. Faisons passer le plan X par la droite l_1. La cubique correspondant aux droites du faisceau se décompose en le faisceau (a_1) et en un cône de la seconde classe ayant un plan en commun. Par le point U il ne passe qu'un seul plan tangent au cône de la seconde classe qui ne contient pas la droite a_1; il y a

donc dans le plan X une seule droite du cône S_3, distincte de la droite l_1. La droite l_1 est donc une droite double du cône S_3.

γ) Supposons que les droites x et y coïncident et que la droite z rencontre la droite $\overline{xy}$. La surface S_3 est un cône du troisième degré dont la droite $\overline{xy}$ est une droite double.

Désignons par X_1, Y_1, Z_1 les trois points de rencontre des trois droites x_1, y_1 et z_1 avec le plan $(z, \overline{xy})$. Si le point U se trouve dans le plan $(X_1Y_1Z_1)$, la surface S_3 se décompose en le plan $(z, \overline{xy})$ et une quadrique.

§ 7. Supposons que deux des droites x_1, y_1 et z_1 soient dans un plan ; si on prend le point U dans le plan de ces deux droites, la surface S_3 se décompose.

Supposons que les trois droites x_1, y_1 et z_1 passent par un point A ; ce point A sera un point conique de la surface S_3.

Supposons que deux des droites x_1, y_1 et z_1 coïncident ; pour toute position du point U, la surface S_3 se décompose.

Si les trois droites x_1, y_1, z_1 sont dans un plan, à un point P de l'espace il correspond le plan (x_1, y_1, z_1) ; sauf pour les points P_i, tels que les trois points X_i, Y_i, Z_i soient en ligne droite. Pour chaque position du point U, la surface S_3 reste la même ; sauf dans le cas où le point U est situé dans le plan (x_1, y_1, z_1). Alors, il lui correspond tout l'espace.

Si la droite x_1 rencontre la droite x, la surface S_3 se décompose en le plan (x_1x) et une quadrique.

Si les droites x_1 et x coïncident, il correspond à un plan π, passant par le point U, une droite qui rencontre les deux droites x et y. A la gerbe de plans de centre U il correspond, par conséquent, une congruence de droites.

Si les six droites x, y, z, x_1, y_1, z_1 sont des génératrices du même mode d'un hyperboloïde, les droites a coïncident avec les droites b. Aux points d'une droite a il correspond les plans passant par cette droite. Les deux courbes $c_3(x, y, z)$ et $d_3(x_1, y_1, z_1)$ sont remplacées par l'hyperboloïde $H_2(x, y, z) = H_2(x_1, y_1, z_1)$. Cet hyperboloïde fait partie de la surface S_3 pour chaque position du point U.

CHAPITRE IV.

Influence des singularités sur la classe.

§ 1. Soit une droite qui rencontre la surface S_3 aux points K_1, K_2, K_3. Menons un plan α par la droite k et soit c_3 la courbe d'intersection avec la surface S_3. Aux points de la courbe c_3 il correspond des plans qui passent par le point U et qui sont tangents à la surface de la troisième classe A_3 qui correspond au plan α. Ces plans sont donc des plans tangents d'un cône de la troisième classe, qui a le point U pour sommet.

Parmi ces plans tangents il se trouve les trois plans $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ qui correspondent aux points K_1, K_2, K_3, et les six plans singuliers qui passent par le point U, puisque tous les plans des faisceaux (x_1), (y_1), (z_1) et les plans osculateurs de la cubique $d_3(x_1, y_1, z_1)$ sont des plans tangents de la surface A_3.

Pour tout plan α passant par la droite k, ces neuf plans seront les mêmes. Aux courbes d'intersection des plans α qui passent par la droite k il correspond donc un système de cônes de la troisième classe qui ont le point U pour sommet et sont tous tangents à neuf plans fixes.

Un plan α passant par la droite k est un plan tangent à la surface S_3 si la courbe d'intersection c_3 possède un point double. Si la courbe c_3 possède un point double, le cône correspondant a un plan bitangent et vice versa. Le nombre de plans tangents qu'on peut mener par la droite quelconque k à la surface S_3 est par conséquent égal au nombre de cônes de la troisième classe, tangents à neuf plans fixes, et qui possèdent un plan bitangent. Ce dernier nombre est évidemment égal au nombre de courbes du troisième degré d'un faisceau qui possèdent un point double. Ce nombre étant, pour un faisceau du $n^{\text{ième}}$ ordre, $3(n-1)^2$ est donc douze. (Cremona, Curtze 88.)

§ 2. Si des points de base d'un faisceau il y en a deux qui coïncident, le nombre de courbes du faisceau qui possèdent un point double est diminué de deux unités. (Cremona, Curtze 88*a*.)

Si donc des neuf plans fixes tangents aux cônes de la troisième classe qui correspondent aux courbes d'intersection de la surface S_3 avec un faisceau de plans (k) il y en a deux qui coïncident, le nombre de plans tangents à la surface S_3 qu'on peut mener par la droite n est diminué de deux unités.

Il s'ensuit que :

1° Si la droite k est tangente à la surface S_3, le nombre de plans tangents est diminué de deux unités.

2° Si deux des plans singuliers passant par le point U coïncident, ce qui donne un point conique sur la surface S_3 (ch. II, § 1), le nombre de plans tangents passant par une droite quelconque k est diminué de deux unités.

3° Si la droite k rencontre une des six droites de la surface S_3 qui correspondent aux six plans singuliers passant par le point U, le nombre de plans passant par la droite k pour lesquels la courbe d'intersection a un point double proprement dit, est diminué de deux unités.

Le plan α passant par la droite k et la droite de la surface S_3 compte pour deux plans tangents.

§ 3. Si des neuf points de base d'un faisceau de courbes du troisième degré il y en a trois qui coïncident, le nombre de courbes du faisceau qui admettent un point double est diminué de trois unités.

Pour démontrer ce théorème, nous employons les notations et la méthode de Cremona (*Introduction à une théorie géométrique des courbes planes*). Soit O_1 le point où toutes les courbes du faisceau osculent le même cercle, O′ un point sur la tangente commune, et O″ un point non situé sur cette tangente.

Faisons les remarques suivantes :

1° Les premières polaires du point O pour toutes les courbes du faisceau seront toutes tangentes à la droite OO′.

2° La courbe du faisceau qui a ce point O pour point double est tangente en O à la droite OO′.

3° Les premières polaires du point O′ passent toutes par le point O.

4° La première polaire du point O′ pour la courbe du faisceau qui a le point O pour point double est tangente à la droite OO′.

5° La droite OO′ est tangente en O à la première polaire du point O pour la courbe du faisceau qui a le point O pour point double.

Cette polaire est une conique avec un point double, qui est donc décomposable en deux droites passant par O ; l'une de ces droites est la droite OO′. Il suit de là que du faisceau des premières polaires du point O, qui est formé par des coniques tangentes en O à la droite OO′, il y a trois points de base coïncidents en O.

On trouve maintenant facilement que la courbe, lieu des intersections de courbes homologues des deux faisceaux de premières polaires des points O et O′, possède un point double en O et que la droite OO′ y rencontre cette courbe en quatre points et y est la seule droite tangente. Il y a donc en O deux branches de cette courbe qui sont tangentes à la droite OO′.

La courbe, lieu des intersections des courbes homologues des deux faisceaux de premières polaires des points O et O″, a le point O pour point double et la droite OO′ est tangente à une des branches qui y passent.

De ces deux courbes du quatrième degré, il y a donc $2 \times 2 + 2 =$ six points de rencontre réunis en O ; le nombre de points de rencontre différents des points de base du faisceau de premières polaires du point O est donc

$$4(n-1)^2 - 6 - \{(n-1)^2 - 3\} = 3(n-1)^2 - 3.$$

De ce qui précède il ressort que, si des neuf plans fixes tangents à tous les cônes de la troisième classe qui correspondent aux courbes d'intersection de la surface S_3 avec les plans du

faisceau (k) il y en a trois qui coïncident, le nombre de plans tangents passant par la droite k est diminué de trois unités.

Par conséquent : 1° Si la droite k est une tangente inflexionnelle de la surface S_3, le nombre des plans tangents qui passent par elle est diminué de trois unités;

2° Si des plans singuliers qui passent par le point U il y en a trois qui coïncident, ce qui donne un point biplanaire B_3 sur la surface S_3 (ch. II, § 2), la classe de la surface S_3 est diminuée de trois unités.

§ 4. Si des points de base d'un faisceau de courbes du troisième degré il y en a quatre qui se sont réunis en un seul, le nombre de courbes du faisceau qui ont un point double est diminué de quatre unités.

Démonstration. Soient $c_3 = 0$ et $c'_3 = 0$ deux courbes du faisceau; elles peuvent toujours être représentées par les équations

$$c_3 = (y + u_2) \left\{ c\,(by + 1) + ax \right\} + yv_2 = 0;$$

$$c'_3 = (y + u_2) \left\{ c'(by + 1) + a'x \right\} + yv'_2 = 0.$$

Dans ces équations, u_2, v_2 et v'_2 sont des fonctions homogènes du second degré en x et y.

Le faisceau des premières polaires de l'origine O est

$$c = \left\{ y\,(cby + c + ax) + c(y + u_2) \right\}$$
$$+ \lambda \left\{ y(c'by + c' + a'x) + c'(y + u_2) \right\}.$$

Le faisceau des premières polaires du point O', intersection de la droite $y = 0$ avec la droite de l'infini, est

$$\left\{ \frac{du_2}{dx}(cby + c + ax) + a(y + u_2) + y\frac{dv_2}{dx} \right\}$$

$$+ \lambda \left\{ \frac{du_2}{dx}(c'by + c' + a'x) + a'(y + u_2) + y\frac{dv'_2}{dx} \right\} = 0.$$

La courbe, lieu des points d'intersection des courbes homologues de ces deux faisceaux, est

$$2y^2(ca' - a'c) - \left\{ 2yx \frac{du_2}{dx} - 3yu_2 - by^3 \right\} (ca' - ac')$$
$$+ 2y^2 \left(c \frac{dv_2'}{dx} - c' \frac{dv_2}{dx} \right) + \left\{ bu_2 y^2 + u_2 x \frac{du_2}{dx} + u_2^2 \right\} (ca' - ca')$$
$$+ (by^3 + u_2 y) \left(c \frac{dv_2'}{dx} - c' \frac{dv_2}{dx} \right) + xy^2 \left(a \frac{dv_2'}{dx} - a' \frac{dv_2}{dx} \right) = 0.$$

La forme de l'équation montre qu'il y a en O deux branches de la courbe tangente à la droite $y = 0$. En cherchant les intersections de cette courbe avec la conique $y + u_2 = 0$, on trouve que le point O compte pour cinq points de rencontre; cette conique est donc osculatrice à une des branches de la courbe du quatrième degré.

Le faisceau de premières polaires du point O″, qui est l'intersection de la droite $x = 0$ avec la droite de l'infini, est

$$\left\{ \left(1 + \frac{du_2}{dy} \right) (cby + c + ax) + (y + u_2)\, cb + v_2 + y \frac{dv_2}{dy} \right\}$$
$$+ \lambda \left\{ \left(1 + \frac{du_2}{dy} \right) (c'by + c' + a'x) + (y + u_2)\, c'b + v_2' + y \frac{dv_2'}{dy} \right\} = 0.$$

La courbe formée par les intersections de courbes homologues des deux faisceaux de premières polaires des points O et O″ est la courbe suivante :

$$xy(ca' - c'a) + \left(xy \frac{du_2}{dy} + u^2 x - by^2 x \right) (ca' - ac') + 2y(cv_2' - c'v_2)$$
$$+ 2y^2 \left(c \frac{dv_2'}{dy} - c' \frac{dv_2}{dy} \right) + \left(bu_2 \frac{du_2}{dy} + u_2 xyb \right) (ac' - ca')$$
$$+ (by^2 + u_2) \left\{ (cv_2' - c'v_2) + y \left(c \frac{dv_2}{dy} - c' \frac{dv_2}{dy} \right) \right\} + xy(av_2' - a'v_2)$$
$$+ xy^2 \left(a \frac{dv_2'}{dy} - a' \frac{dv_2}{dy} \right) = 0.$$

Cette courbe a l'origine pour point double et la droite $y = 0$ est une des tangentes. Des points d'intersection de cette courbe avec la conique $y + u_2 = 0$, il y en a quatre qui se sont réunis dans l'origine. Cette conique est donc osculatrice à la branche qui est tangente à la droite $y = 0$.

Le point O doit donc compter pour sept points d'intersection des deux courbes du quatrième degré. Le point O compte pour trois points parmi les points de base du faisceau de premières polaires du point O. Le nombre de points d'intersection des deux courbes du quatrième degré différents des points de base du faisceau des premières polaires du point O est, par conséquent,

$$4(n-1)^2 - 7 - \{(n-1)^2 - 3\} = 3(n-1)^2 - 4.$$

Ces points étant les points où passent trois premières polaires homologues de trois points O, O′, O″ non situés en ligne droite, sont des points doubles de courbes du faisceau. Le nombre de courbes du faisceau qui ont un point double est donc diminué de quatre, par le fait que quatre points de base coïncident.

La coïncidence de quatre plans singuliers passant par le point U, ce qui donne sur la surface S_3 un point biplanaire B_4 (ch. II, § 3), diminue donc la classe de la surface S_3 de quatre unités.

§ 5. α) Si parmi les neuf points de base il y en a trois sur une droite, une des courbes du faisceau se décompose en cette droite et en une conique.

Cette cubique décomposable donne deux points doubles; le nombre de courbes du faisceau qui ont un point double proprement dit est donc diminué de deux unités.

Par conséquent, si parmi les six plans singuliers passant par le point U il y en a trois qui passent par une droite, ce qui donne une surface S_3 avec un point conique (ch. II, § 4, α), la classe de la surface S_3 est diminuée de deux unités.

Si la droite k rencontre une droite g_{ik} de S_3, il passe par la

droite $\overline{ik}$ trois plans tangents à tous les cônes K_3. Le plan (kg_μ) compte donc pour deux plans tangents.

Si la droite k rencontre la droite g'_i, six des neuf plans tangents communs aux cônes k_3 sont tangents au cône i'; les trois autres plans passent par conséquent par une droite, et le plan kg'_i doit compter pour deux plans tangents.

β) Si parmi les neuf points de base il y en a trois sur une ligne droite l et un autre point de base qui coïncide avec un de ces trois points, P, de manière que toutes les courbes du faisceau ont en P une tangente commune distincte de la droite l, le nombre de courbes du faisceau qui ont un point double est diminué de trois unités.

En effet, la conique qui, avec la droite l, forme une courbe du faisceau, doit passer par le point P. Cette cubique décomposable est donc la courbe du faisceau qui a le point P pour point double, et de ce chef, il faut diminuer le nombre de points doubles situés sur des courbes du faisceau de deux unités.

La cubique décomposable possède encore un point double ; donc il faut encore diminuer d'une unité le nombre de points doubles restant pour les autres courbes du faisceau.

Par conséquent, si par une droite l passant par le point U il passe quatre plans singuliers, dont deux coïncident, ce qui donne une surface S_3 avec un point biplanaire B_3 (ch. II, § 5, α), la classe de la surface S_3 est diminuée de trois unités.

Par un raisonnement analogue au précédent, on voit que si des neuf points de base il y en a trois en ligne droite et qu'en même temps un de ces trois points s'est confondu avec deux autres points de base, le nombre de courbes du faisceau qui ont un point double est diminué de quatre unités.

Par conséquent, si le point U est situé sur une droite l, par laquelle il passe cinq plans singuliers dont trois coïncident, ce qui donne un point biplanaire B_4 sur la surface S_3 (ch. II, § 5, β), la classe de cette surface est diminuée de quatre unités.

γ) Si parmi les neuf points de base il y en a trois sur une droite l, tandis que deux de ces points A et B se sont réunis chacun avec un autre point de base, le nombre de courbes du

faisceau qui ont un point double est diminué de quatre unités.

La conique, qui avec la droite l forme la cubique décomposable du faisceau, passe évidemment par les points A et B. Comme en A et B se sont réunis deux points de base, il passe par A et par B une cubique à point double, pour laquelle il faut diminuer le nombre de courbes du faisceau à un point double de deux unités. Ces deux cubiques ne font qu'une, à savoir la cubique décomposable; donc du chef de cette cubique décomposable il faut diminuer le nombre de courbes à point double de quatre unités.

Par conséquent, si le point U est situé sur une droite l par laquelle il passe cinq plans singuliers, et que parmi ceux-ci il y ait deux couples qui coïncident, ce qui donne un point biplanaire B_4 sur la surface S_3 (ch. III, § 3, γ), la classe de la surface S_3 est diminuée de quatre unités.

Par un raisonnement analogue au précédent, on voit que, si des neuf points de base il y en a trois en ligne droite et qu'un de ces trois points coïncide avec deux autres points de base, le nombre de courbes du faisceau qui possèdent un point double est diminué de cinq unités.

Par conséquent, si par une droite l passant par le point U il passe six plans singuliers dont trois coïncident et encore deux autres aussi, ce qui donne sur la surface S_3 un point biplanaire B_5 (ch. III, § 3, γ), la classe de cette surface S_3 est diminuée de cinq unités.

§ 6. Si parmi les neuf points de base quatre coïncident en un seul O, tandis que sur la tangente en O à toutes les courbes du faisceau il y a encore un point de base, le nombre de courbes du faisceau à point double est diminué de six unités.

Démonstration. Le faisceau peut se mettre sous la forme

$$\begin{gathered}\left[(y+u_2)(cax+by+c)+yv_2\right]\\ -\lambda\left[(y+u_2)(c'ax+b'y+c')+yv_2'\right]=0;\end{gathered}$$

u_2, v_2 et v_2' étant de nouveau des formes homogénes du second degré en x et y.

Le faisceau de premières polaires de l'origine O est

$$[2cy + cu_2 + by^2 + caxy] - \lambda[2c'y + c'a_2 + b'y^2 + c'axy] = 0.$$

La seule courbe décomposable de ce dernier faisceau étant la courbe $(bc' - cb')y^2 = 0$, les quatre points de base de ce faisceau coïncident en O.

La courbe $C_{00'}$, lieu des intersections de courbes homologues des deux faisceaux projectifs de premières polaires des points O et O′, O′ étant un point sur la tangente en O aux courbes du faisceau $y = 0$, est la courbe

$$\begin{gathered}(2cy + cu_2 + by^2 + caxy)\\ \left\{\frac{du_2}{dx}(c'ax + b'y + c') + (y + u_2)\,c'a + y\frac{dv'_2}{dx}\right\}\\ -(2c'y + c'u_2 + b'y^2 + c'axy)\\ \left\{\frac{du_2}{dx}(cax + by + c) + (y + u_2)\,ca + y\frac{dv_2}{dx}\right\} = 0,\end{gathered}$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$y(yw_1 + w_3) = 0,$$

w_1 et w_3 étant des formes homogènes du premier et du troisième degré en x et y.

En prenant un point O″ sur l'axe des Y, on trouve pour la courbe $C_{00''}$, lieu des intersections de courbes homologues des deux faisceaux projectifs de premières polaires des points O et O″,

$$\begin{gathered}(2cy + cu_2 + by^2 + caxy)\\ \left\{\left(1 + \frac{du_2}{dy}\right)(c'ax + b'y + c') + (y + u_2)\,b' + v'_2 + y\frac{dv'_2}{dy}\right\}\\ -(2c'y + c'u_2 + b'y^2 + c'axy)\\ \left\{\left(1 + \frac{du_2}{dy}\right)(cax + by + c) + (y + u_2)\,b + v_2 + y\frac{dv_2}{dy}\right\} = 0.\end{gathered}$$

Cette courbe peut se mettre sous la forme

$$y^2 + yw_2 + w_4 = 0.$$

Parmi les points de rencontre des courbes $C_{00'}$ et $C_{00''}$, dix se réunissent en O. En effet, la droite $y = 0$ rencontre la courbe $C_{00''}$ en O en quatre points. Le point O est un point double de la courbe $C_{00''}$ et de la courbe du troisième degré

$$yw_1 + w_3 = 0.$$

De plus, la tangente aux deux branches de la première est aussi tangente à une des branches de la dernière.

Des points de rencontre de ces deux courbes, il y en a donc six qui se réunissent en O. Le point O doit donc compter pour dix points de rencontre des courbes $C_{00'}$ et $C_{00''}$. Ces deux courbes se rencontrent encore en six points qui ne sont pas des points de base du faisceau de premières polaires du point O.

Ces six points sont donc des points doubles de courbes du faisceau. Ordinairement il y a douze points doubles ; ce nombre a donc été diminué de six unités.

Par conséquent, si des six plans singuliers qui passent par le point U, cinq passent par une droite et si de ces cinq plans quatre coïncident, ce qui donne sur la surface S_3 un point uniplanaire U_6 (ch. III, § 3, ε), la classe de la surface S_3 est diminuée de six unités.

SUR

LE FROTTEMENT INTÉRIEUR

DANS

QUELQUES MÉTAUX

PAR

A. CAMUS

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

SUR

LE FROTTEMENT INTÉRIEUR

DANS

QUELQUES MÉTAUX

Des expériences très intéressantes ayant été faites sur le frottement intérieur des liquides et des gaz, nous avons été amené à examiner si nous ne pourrions pas faire quelques expériences semblables sur le frottement intérieur des métaux.

On peut admettre que :

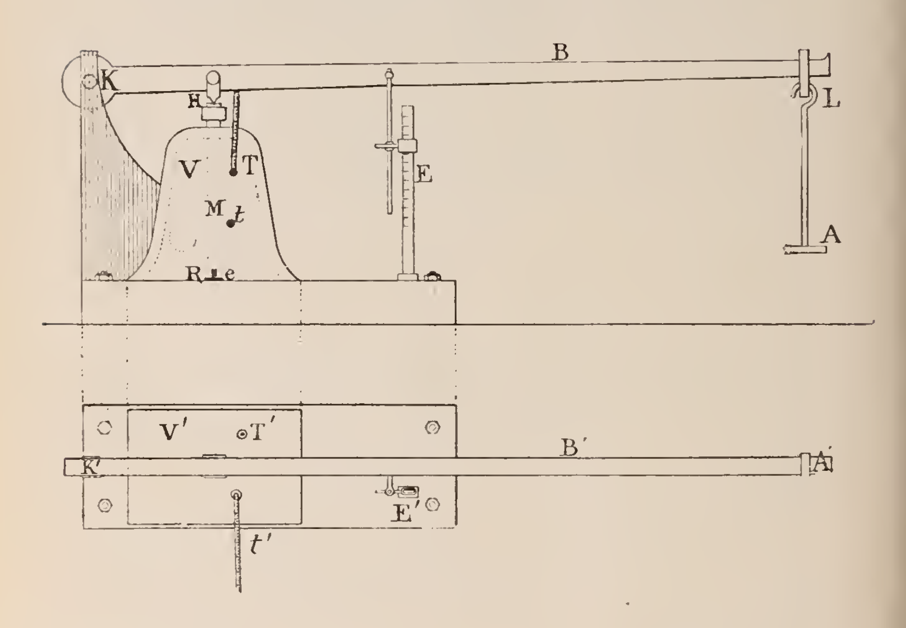
Le frottement intérieur d'un solide est proportionnel à l'effort nécessaire pour déterminer, toutes choses étant égales, un même écrasement ou un même déplacement des molécules les unes par rapport aux autres.

L'appareil dont nous nous sommes servi pour nos expériences se compose essentiellement :

D'un réservoir en fonte V; sous ce réservoir se trouve un foyer à gaz; à l'intérieur, un disque d'acier poli R, sur lequel nous disposerons les corps à employer dans nos expériences. Sur ce disque vient s'adapter une autre tige en acier M, qui glisse dans une ouverture O (nous avons eu soin de munir cette tige d'une rainure qui l'empêche de tourner et qui évite par là

même des torsions qui auraient pu se communiquer aux masses métalliques dont nous nous servons). Les cylindres de métal que nous avons pris seront disposés entre cette tige mobile et le disque d'acier R dont il a été question précédemment. Sur l'extrémité supérieure de cette tige repose un levier qui a son point d'appui en K; en L se trouve un crochet auquel nous suspendrons les poids destinés à mesurer les pressions que les cylindres métalliques supporteront.

Dans notre levier, la résistance sera donc exercée en H ; la



puissance en L et le point d'appui en K. Notre appareil a été construit de telle façon que le bras de levier de la puissance soit dix fois plus grand que le bras de levier KH de la résistance; par conséquent, les poids supportés par nos petits cylindres seront dix fois plus grands que ceux que nous mettrons sur le plateau A de notre appareil.

Notre réservoir V aura été divisé en deux compartiments et, afin de maintenir la température uniforme, nous avons placé

à l'intérieur de l'amiante. Pour nous assurer de cette constance de température, nous avons employé deux thermomètres, l'un placé en T et l'autre en *t*.

Pour mesurer les variations de hauteur avec les pressions, nous avons adapté en E une échelle divisée, devant laquelle se meut une aiguille fixée à une tige qui est posée sur le levier. Nous avons constaté très facilement qu'à un abaissement d'une division de l'échelle correspondait une diminution de la hauteur du petit cylindre de $0^{m},00043$.

Donc, pour récapituler : une division de l'échelle vaut $0^{m},00043$ comme abaissement de hauteur du cylindre.

20 kilogrammes disposés sur le plateau exercent sur nos petits cylindres une pression de 200 kilogrammes.

Avant de commencer nos expériences, nous avons une remarque à faire. Lorsque nous exerçons une certaine pression sur le levier, pression communiquée aux petits cylindres, nous voyons naturellement ceux-ci s'aplatir et, par conséquent, leur surface supérieure devenir plus grande ; pour pouvoir arriver à un résultat, nous devrions faire nos calculs sur des cylindres dont les hauteurs diminueraient, mais dont les surfaces resteraient constantes.

Il est logique d'admettre que la pression que nous devons employer devra être d'autant plus grande pour une même diminution de hauteur que la surface sera plus grande. Ce qu'il fallait vérifier.

A cet effet, nous avons employé trois métaux : le plomb, le cuivre et le zinc. Nous avons obtenu des résultats concordant avec la loi que nous venons d'admettre. Il nous suffira de rendre compte des résultats obtenus avec un seul métal, le plomb par exemple.

Nous avons pris notre cylindre de plomb de $0^{m},015$ de hauteur et $0^{m},007$ de diamètre et nous l'avons placé dans notre appareil en *c*. Exerçant une pression de 400 kilogrammes en *c*, la surface supérieure devenait double de ce qu'elle était primitivement, et de 38^{mm2} de surface qu'elle avait d'abord, elle en atteignait alors 76 et nous remarquions que pour obtenir une même dimi-

nution de hauteur du cylindre nous devions appliquer en *c* un poids deux fois plus fort, c'est-à-dire 800 kilogrammes, et en continuant de cette façon, on avait ensuite à ajouter 1600 kilogrammes lorsque la surface était quatre fois plus grande qu'au début de notre expérience, et ainsi de suite ; cependant, il arrivera un moment où le cylindre sera devenu tellement mince qu'une augmentation considérable de pression sera d'un effet à peu près nul ; nous voyons donc que la loi que nous venons d'énoncer n'est néanmoins qu'une loi limite, mais que nous pourrons employer, parce que, comme nous le verrons plus loin, nous n'avons exercé que des pressions variant entre 2200 et 3400 kilogrammes. Nous verrons aussi par la suite que nous nous sommes borné à expérimenter entre des limites variant de 2200 à 3400 kilogrammes pour une raison plus importante encore que la précédente. Donc, dans tous les calculs que nous emploierons par la suite, nous aurons tenu compte *implicitement* de la remarque précédente.

Voici comment nous avons ensuite opéré : Nous avons pris un cylindre en plomb de $0^m,015$ de hauteur et de $0^m,007$ de diamètre, et nous l'avons introduit en *c* dans un bain d'air chaud en V, et nous avons divisé notre expérience en deux parties :

1. Maintenir la température constante et faire varier la pression en notant les hauteurs que prenaient successivement nos petits cylindres suivant les variations de pression.

2. Maintenir la pression constante et faire varier la température en faisant les mêmes observations que dans le premier cas.

I.

TEMPÉRATURE CONSTANTE ET PRESSION VARIABLE.

Le plomb étant, comme nous l'avons dit, introduit dans l'appareil, nous avons d'abord expérimenté à la température ordinaire, soit 20°.

Ayant déposé en A un poids de 4 kilogrammes, ce qui fait

donc 40 kilogrammes appliqués sur notre métal en c, d'après ce que nous avons dit au commencement de ce rapport sur le levier dont nous nous servions, le cylindre avait alors une hauteur de $0^{mm},0133$, ce que nous mesurions à l'aide de notre échelle E, eu égard à la donnée connue naturellement que, une division de l'échelle vaut $0^{m},00043$, mesure que nous avons contrôlée à l'aide du vernier; ajoutant ensuite 6 kilogrammes en A, soit donc 60 kilogrammes appliqués en c; la hauteur du cylindre était de $0^{m},01$; avec 10 kilogrammes en A en plus, soit donc une pression de 100 kilogrammes en c, la hauteur était de $0^{m},008$; avec 20 kilogrammes, donc 200 en c, la hauteur était de $0^{m},006$. Nous avons remarqué que jusqu'à ce point le corps se comprimait d'une façon tout à fait anormale : à la moindre augmentation de pression correspondait une diminution assez forte de la hauteur, et à partir de ce moment les diminutions de hauteur étaient régulières et variaient suivant une certaine loi, en ajoutant ensuite 50 kilogrammes en A, soit 500 en c, donc la hauteur était alors de $0^{m},005$, puis avec 500 kilogrammes en plus, la hauteur était $0^{m}004$; avec 500 kilogrammes encore en plus, $0^{m},003$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la hauteur soit de $0^{m},002$; nous avions alors exercé une pression de 2600 kilogrammes, alors la diminution de hauteur devient insensible. Pour plus de facilité, nous allons construire un diagramme, pour tenir compte de ces résultats, nous porterons les pressions en abscisse et les hauteurs en ordonnée; nous prenons l'échelle suivante : en abscisse, 1 millimètre représente une pression de 20 kilogrammes exercée sur le corps en c; en ordonnée, 1 millimètre de la hauteur du cylindre est représenté par 3 millimètres et nous avons ainsi agrandi la hauteur pour en rendre plus visibles les diminutions; par un procédé connu, nous obtiendrons une courbe qui, pour le plomb, donnera les variations de hauteur avec les variations de pression.

Nous pouvons déjà remarquer que, dans le plomb, les molécules n'étaient primitivement pas en équilibre stable; elles n'acquéraient un état d'équilibre stable que lorsqu'il s'était produit un certain tassement; cette remarque se tire très facilement

du diagramme que nous avons construit ci-contre. Nous avons ensuite expérimenté à des températures intermédiaires entre 20 et 120°, mais toujours en maintenant notre température constante, les pressions variant, mais nous obtenions des courbes qui se confondaient pour ainsi dire avec celles que nous avons obtenues; à une même pression cependant correspondaient des hauteurs sensiblement plus faibles. Les proportions dans lesquelles nous avons construit nos diagrammes ne permettaient pas d'en tenir compte. Nous maintenions ensuite notre température à 120° et nous recommencions le même travail que précédemment; nous obtenons une nouvelle courbe; puis à 220°, par un même raisonnement, nous obtenons une troisième courbe. A une température plus élevée que 220°, nous ne pourrions plus être assez rigoureux dans nos expériences, attendu que le plomb étant fusible à 320°, devient déjà trop mou à une température de 250°; de plus, l'appareil dont nous nous servions étant chauffé au moyen d'un foyer à gaz et vu ses dimensions assez fortes, nous ne pouvions guère atteindre des températures de beaucoup supérieures à 300°.

Nous pouvons remarquer aussi, d'après les courbes obtenues, que pour le plomb, à partir d'une pression qui est voisine de 3200 kilogrammes, à de grandes augmentations de pression correspondent de petites diminutions de hauteur; à partir de ce moment, les courbes deviennent asymptotiques à l'axe des x. C'est ce qui pouvait être prévu du reste, car il était logique d'admettre que la hauteur ne pouvait diminuer indéfiniment : c'est ce qui se traduit en ce que notre courbe devient asymptote.

Donc, en résumé, deux variations anormales des hauteurs avec les pressions.

II.

PRESSION CONSTANTE ET TEMPÉRATURE VARIABLE.

Il était aussi naturel de voir de quelle façon allait se comporter le corps lorsque, la pression étant constante, la température était variable.

Nous avons fait supporter à notre petit cylindre de plomb une pression de 2200 kilogrammes et nous avons commencé à chauffer l'appareil au moyen de notre foyer à gaz ; nous avons alors soigneusement examiné la marche des thermomètres (T, T') et (*t*, *t'*) de notre appareil, en même temps que les diminutions de hauteur. Nous avons trouvé, avec une telle pression, et à 20°, la hauteur (trois fois plus grande naturellement, comme nous l'avions prise précédemment dans la courbe des variations de hauteur avec les pressions) était de 0^m,008 à 60°; de 0^m,0065 à 100°; de 0^{m}005 à 140° ; de 0^m,004 à 180°; de 0^m,003 à 220°.

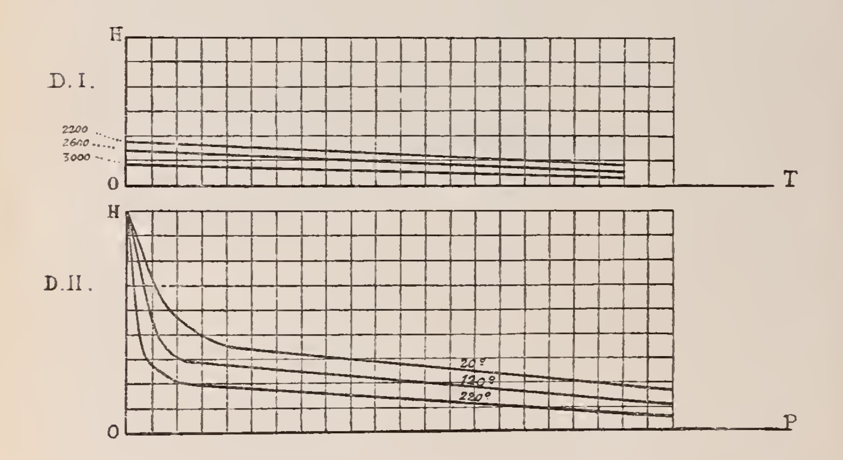
Pour rendre ces résultats plus profitables et pour en tirer des conclusions avec plus de facilité, nous avons encore employé un diagramme, en prenant comme abscisse les températures ; à l'origine correspond la température normale de 20° et 2° du thermomètre étant représentés par 1 millimètre, en ordonnée; nous prenons toujours les hauteurs et adoptons les mêmes conventions que précédemment.

Construisons notre courbe : nous obtenons une droite qui se rapproche de l'axe des abscisses en même temps que la température augmente. Nous avons fait la même expérience ; mais avec une pression constante de 2600 kilogrammes nous obtenons encore une droite et nous remarquons que pour une même température la hauteur des cylindres était un peu moindre que dans le premier cas, c'est-à-dire à une pression de 2200 kilogrammes. Nous avons renouvelé la même expérience avec une pression de 3000 kilogrammes et nous obtenions encore une nouvelle droite. Nous n'avons pu apprécier et mesurer les hauteurs que jusqu'à une température d'environ 170°; à partir de là, ces hauteurs devenant trop faibles, nous aurions pu commettre des erreurs absolument trop grandes, qui auraient pu influencer notre résultat final. De plus, comme nous l'avons déjà dit, le métal devenant mou, ne se comprime plus qu'avec une très grande irrégularité. Telle est la raison pour laquelle nous n'avons pas poussé nos expériences plus avant. Comme on aura pu aussi le remarquer, nous n'avons pas pris une pression inférieure à 2200 kilogrammes, quoique nous ayons pu le

faire, mais cela pour une raison que nous verrons par la suite et dont nous ne parlerons pas maintenant, n'ayant encore expérimenté que sur un seul corps. Nous remarquons aussi que nos droites deviennent asymptotiques à l'axe de x. Donc, d'après ce que nous avons obtenu, nous pouvons en déduire que pour le plomb :

Les diminutions des hauteurs sont proportionnelles aux augmentations de température, ou encore : le frottement est inversement proportionnel à la température.

Pour voir jusqu'où notre loi est rigoureuse, nous nous servons du tableau ci-dessous.



Nous avons (D. I.) la variation de hauteur avec les températures, les courbes étant tracées en connaissant quelques points de repaire; les données étant celles vues précédemment. La droite supérieure est celle pour laquelle le corps supporte une pression constante de 2200 kilogrammes; la seconde pour une pression de 2600 kilogrammes et la droite inférieure pour une pression de 3000 kilogrammes. (D. II.) est la courbe de la variation de hauteur avec les pressions; la courbe supérieure correspondant à une température de 20°, la seconde 120° et la troisième 220°.

Ces résultats théoriques étant obtenus, voici maintenant un tableau des résultats observés pour le plomb :

PRESSION.	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°	220°
2200 kg. .	8	7,5	7	6	5	4,5	4	3,5	3	2
2600 id. .	6	—	$5\,^1/_4$	$4\,^3/_4$	—	4	—	—	3	2
3000 id. .	5	—	4		—	3	—	2		1

Les chiffres indiqués dans les colonnes ci-dessus expriment des millimètres. En comparant ce tableau avec les courbes obtenues, et négligeant de légères erreurs d'observation, nous voyons que la loi énoncée se vérifie pour ce corps.

Il s'agirait maintenant de savoir si la loi est générale et si elle se vérifie également pour d'autres corps. A cet effet, nous nous sommes servi des métaux suivants : l'argent, le platine, le palladium, le cuivre, l'or, le zinc, l'aluminium, l'étain et le fer. Avec cette série de dix métaux, nous pouvons aisément en déduire l'exactitude de la loi trouvée pour le plomb.

Nous pourrions recommencer pour chacun de ces corps le raisonnement que nous avons fait précédemment pour le plomb, mais nous nous bornerons à dresser un tableau contenant tous les résultats observés et les diagrammes que nous avons obtenus.

Il y a cependant pour certains de ces corps certaines anomalies que nous allons d'abord donner sous forme de remarque.

D'abord le zinc. Il se comporte comme le plomb, avec cette différence que les courbes de variations des hauteurs avec les pressions s'abaissent moins rapidement que pour le plomb et qu'elles ne deviennent une droite qu'à partir du moment où l'on exerce une pression de 2200 kilogrammes; cette droite devient asymptotique à l'axe de x, à partir du moment où la pression est d'environ 3200 kilogrammes.

Pour l'aluminium, nous remarquons qu'à la température ordinaire et jusqu'à une pression de 1000 kilogrammes le métal se comprime régulièrement, et en augmentant la pression jusque environ 2200 kilogrammes, le métal semble s'affaisser subitement et au delà de 2200 kilogrammes se comprime encore d'une manière régulière.

Tenant compte de nos résultats au moyen d'un diagramme, nous obtenons une courbe qui devient asymptotique à l'axe de x dès que la pression est d'environ 3500 kilogrammes. Nous avons noté nos résultats à différentes températures : à 20°, 70°, 120°, 170° et 220°, et chaque fois nous avons obtenu une courbe analogue à la première. Nous pouvons ajouter ici une remarque. Nous avons dit que le corps se comprimait d'abord régulièrement pour se comprimer ensuite irrégulièrement ; notons tous les points qui coïncident à cette variation anormale et relions-les par une courbe; il existe de nouveau un passage de la compression irrégulière à une compression régulière ; nous pouvons encore noter tous ces points et les relier par une courbe ; ces deux courbes semblent se réduire à deux droites qui paraissent concourir.

Par analogie, avec ce que l'on connait concernant la température, prolongeons ces deux droites qui semblent se rencontrer, et nous obtenons ainsi une nouvelle courbe. Nous verrons plus loin les conclusions que nous pourrons en tirer.

L'étain se comporte tout à fait comme le plomb, à quelques petits changements près et que nous pourrons du reste constater sur notre courbe.

Le fer se comprimait très régulièrement de prime abord et nous aurions pu être amené à croire que cet affaissement, que nous avions constaté pour les autres métaux, n'existait pas pour le fer, car avec 3600 kilogrammes de pression, nous obtenions toujours une compression très régulière. Cela provenait peut-être de ce que notre cylindre en fer était trop résistant et il se peut que, si nous avions continué à augmenter la pression, ce que nous ne pouvions faire par suite d'une défectuosité de notre appareil, nous serions parvenu à avoir une courbe analogue

à celles obtenues précédemment. Nous avions donc à faire une expérience complémentaire. A cet effet, nous nous sommes servi d'un cylindre de dimension moindre. Il avait actuellement $0^m,01$ de hauteur et $0^m,004$ de diamètre; nous avons opéré comme précédemment et nous avons obtenu pour le fer des résultats analogues anx précédents. Nous avions une courbe et nous sommes parvenu, par analogie avec les courbes obtenues pour des cylindres de mêmes dimensions en plomb et en zinc, à la raccorder avec celle que nous aurions obtenue si les cylindres avaient eu les dimensions primitives. Donc, la courbe qne nous avons en dernier lieu, c'est-à-dire celle dont nous avons tenu compte dans notre rapport, est celle d'un cylindre de $0^m,015$ de hauteur et $0^m,007$ de diamètre, mais soumis à une pression plus élevée. Nous remarquons aussi cet affaissement du métal lorsqu'on arrive à une certaine pression.

Pour l'argent, notre courbe est toujours très régulière, et cette compression subite, ensuite cette régularité de compression que nous avons remarquées, se dessinent beaucoup mieux et nous permettent de tracer la courbe obtenue en reliant tous les points où commence l'affaissement et où il finit avec une assez grande régularité.

Pour le platine, nous avons eu le même travail à faire que pour le fer; nous n'avions de prime abord constaté aucune anomalie, et la courbe de variation des hauteurs avec les pressions se réduisait à une droite. Les remarques et les résultats obtenus pour le fer nous indiquaient clairement ce que nous avions à faire et c'est ce qui nous a amené à des résultats tout à fait semblables aux autres.

Pour le palladium, nous avons obtenu une courbe semblable aux autres, mais ici, il y avait bien un moment où se produisait l'affaissement, mais les proportions dans lesquelles nous avons fait nos courbes le rendent très peu visible.

Enfin, pour le cuivre et l'or, nous n'avons rien à ajouter; ces deux corps se comportaient comme le faisait l'argent Ces remarques étant faites, nous allons maintenant faire ce que nous avons fait avec le plomb : c'est-à-dire tracer toutes les courbes que

nous avons faites, d'après la méthode de construction par points en conservant toutes les mêmes conventions que celles que nous avons faites pour ce métal.

Pour plus de facilité, nous avons fait toutes ces opérations et les avons notées dans un tableau semblable à celui que nous avons fait pour le plomb ; les chiffres qui se trouvent dans les colonnes expriment des millimètres. Comme pour le plomb, les hauteurs respectives des cylindres sont multipliées par 3, afin de rendre plus apparents les résultats que nous voulons en déduire. Nous pourrons maintenant faire remarquer que ce que nous avons dit primitivement, que la loi n'était vraie qu'entre certaines limites et à de légères différences près, nous avons pu concidérer notre loi comme étant rigoureuse pour des pressions comprises entre 2200 et 3600 kilogrammes.

Nous pouvons donc maintenant, avant de conclure, comparer d'une part les courbes obtenues et les résultats observés, le tout étant contenu dans les tableaux suivants.

N. B. — Pour le platine et le fer, qui sont englobés dans le tableau, d'après les calculs que nous avons faits, nous avons à ajouter environ 2000 kilogrammes, provenant de ce que, en employant les cylindres primitifs, nous ne disposions pas de poids assez forts. Nous devrons donc lire dans la colonne 2200 kilogrammes : (2200 + 2000 kg.) = 4200 kilogrammes ; dans la colonne 3000 kilogrammes : (3000 + 2000 kg.) = 5000 kilogrammes.

Pression de 2200 kilogrammes.

	20°	40°	60°	70°	80°	100°	120°	140°	160°	170°	180°	200°	220°	270°	320°
Argent	33	31	28	27	26	23	21	18	16	15	14	11	9	4	—
Platine	39	—	—	38,5	—	—	38	—	—	—	—	—	37	—	—
Palladium	28	27	26	25,5	25	24,5	24	23,5	23	22,5	22	21	21,5	19	17
Cuivre	28	27,5	27	26,5	26	26	25	24,5	24,5	24	23	22,5	22	20,5	19
Or.	18	17	16,5	16	15,5	15	14	13,5	12,5	12	11,5	10,5	10	8	7
Plomb	8	7,5	7	6,5	6	5	4,5	4	3,5	—	3	2,5	2	—	—
Zinc	17	15,5	14	12,5	11,5	9,5	7	—	—	—	—	—	—	—	—
Aluminium	25	24	23	22,5	22	21	19	18	17	16,5	16	14,5	13	10	—
Étain.	7	—	—	6	—	—	5	—	—	4	—	—	3	—	2
Fer	39	38,5	38	38	37,5	37,5	37	36,5	36	36	35,5	34,5	34	33	32

Pression de 2400 kilogrammes.

	20°	40°	60°	70°	80°	100°	120°	140°	160°	170°	180°	200°	220°	270°	300°
Argent	30	27,5	26	25	23	21	19	17	15	13	12	11	10	4	—
Platine	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Palladium	26	25	24,5	24	23,5	23 1/4	23	22 1/4	22.5	21,5	21	20	19	18	17
Cuivre	27	26,5	26	26	25,5	25	24	23	22,5	22	21,5	21,5	21	20	18
Or.	17	16,5	16	15,5	15	14,5	14	13,5	13	12	11	10	9	8	7
Plomb	7	—	—	5 3/4	—	—	4,5	—	—	3 1/4	—	—	2	—	—
Zinc	16	15	12,5	11	9	7,5	6	—	—	—	—	—	—	—	—
Aluminium	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Étain	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Fer	39	38,5	38	38	37,5	37,5	37	36,5	36	36	35,5	34,4	34	33	32

Pression de 2600 kilogrammes.

	20°	40°	60°	70°	80°	100°	120°	140°	160°	170°	180°	200°	220°	270°	320°
Argent	27	25	23	22	21	19	17	15	13	11	9	8	7	4	—
Platine	38	—	—	37,5	—	—	37	—	—	36,5	—	—	36	35,5	35
Palladium	24	—	—	23,5	—	—	21	—	—	20	—	—	18	17,5	17
Cuivre	26	25,5	25	24,5	24,5	23,5	23	23	22,5	22	21,5	21	20,5	19	18
Or.	16	15	14,5	14	13,5	13	13	12	11,5	11	10,5	10	9	7,5	6,5
Plomb	6	—	—	5	—	—	4	—	—	3	—	—	2	—	—
Zinc	15	13	11	10	9	7	5	—	—	—	—	—	—	—	—
Aluminium	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12,5	10,5	9	—
Étain.	6	—	—	5	—	—	4	—	—	3	—	—	2	—	—
Fer	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Pression de 2800 kilogrammes

	20°	40°	60°	70°	80°	100°	120°	140°	160°	170°	180°	200°	220°	270°	300°
Argent	23	21	19,5	19	18	16,5	15	13,5	12	11	9	8,5	7	3	—
Platine	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Palladium	22	—	—	21	—		20	—	—	18	—	—	17	15	14
Cuivre	25	24,5	24	24	23,5	23	22,5	22	22	21,5	21	20	19	18	17
Or.	14	13,5	13	12,5	12,5	12	11,5	11	10,5	10	9	8,5	7,5	7	5
Zinc	12	10	8,5	8	7,5	6	4	—	—	—	—	—	—	—	—
Plomb	5	—	—	4	—	—	3	—	—	2	—	—	1	—	—
Aluminium	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Étain.	—	—	—	—	—	—	—	—		—		—	—	—	—
Fer	38	37,5	37	37	36,5	36,5	36	35,5	35	35	34,5	33,5	33	32	31

Pression de 5000 kilogrammes.

	20°	40°	60°	70°	80°	100°	120°	140°	160°	170°	180°	200°	220°	270°	320°
Argent	20	18,5	16,5	16	15,5	14	12	10	8,5	8	7,5	6	4	3	—
Platine	37	—	—	36	—	—	35		—	34,5	—	—	34	33,5	33
Palladium	20	—	—	19,5	—	19	18,5	—	—	—	17,5	—	16	—	14
Cuivre	24	23,5	23	23	22,5	22,5	22	21,5	21,5	21	20,5	20	19,5	18	17
Or	13	12,5	12	11,5	11,5	11	10	9	8	7,5	7,5	7	6,5	5,5	4
Zinc	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Plomb	5	—	—	4	—	—	3	—		2	—	—	1	—	
Aluminium	20	19	18	17,5	16,5	16	15,5	14,5	13,5	12,5	11,5	11	11	8	—
Étain	5	—	—	4	—	—	3	—	—	2	—	—	1	—	—
Fer	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Pression de 3200 kilogrammes.

	20°	40°	60°	70°	80°	100°	120°	140°	160°	170°	180°	200°	220°	270°	320°
Argent	17	15,5	14	13,5	12	11,5	10	8,5	7	6,5	—	4,5	3	2	—
Platine	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Palladium	18	—	—	17,5	—	—	17	—	—	16	—	—	15	14	13
Cuivre	23	22	21,5	21,5	21	20,5	20,5	19,5	19	18,5	18	17,5	17,5	17	16,5
Or.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Zinc	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Plomb	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Aluminium	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Étain	4	—	—	3	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—
Fer	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Pression de 3400 kilogrammes.

	20°	40°	60°	70°	80°	100°	120°	140°	160°	170°	180°	200°	220°	270°	320°
Argent	14	12,5	11,5	11	10	9,5	8	6,5	6	5	4,5	3,5	2	—	—
Platine	35	—	—	34,5	—	—	34	—	—	33,5	—	—	33	32,5	32
Palladium	17	—	16,5	—	—	—	15	15		—	14,5	—	13	12	11
Cuivre	21,5	21	20,5	20,5	20	20	19,5	19	18,5	18,5	18,5	18	18	17,5	17
Or.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Zinc	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Plomb	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Aluminium	18	17,5	17	16,5	16	15	14	13,5	13	12,5	12	11	10	8	—
Étain	4	—	—	3	—	—	2,5	—	—	2	—	—	1	—	—
Fer	37	36,5	36	36	35,5	35,5	35	34,5	34	34	33,5	32,5	32	31	30

Température de 20°.

	2200 kg.	2400 kg.	2600 kg.	2800 kg.	3000 kg.	3200 kg.	3400 kg.
Argent . .	33	30	27	24	21	18	15
Platine . .	43	—	38	—	37	—	35
Palladium .	28	26	24	22	20	18	17
Cuivre . .	28	27	26	25	24	23	21,5
Or. . . .	18	17	16	14	13	11,5	10
Zinc . . .	17	16	15	14	—	—	-
Plomb . .	8	7	6	5	4	3	2
Aluminium .	25	24	23	22	20	19	18
Étain. . .	7	—	6	—	5	—	4
Fer . . .	39	—	—	38	-	37,5	37

Température de 70°.

	2200 kg.	2400 kg.	2600 kg.	2800 kg.	3000 kg.	3200 kg.	3400 kg.
Argent . .	27	24	21	18	14	12	10
Platine . .	38,5	—	38	—	36	—	34,5
Palladium .	25,5	24	23,5	20,5	19	17,5	16
Cuivre . .	26,5	24,5	24,5	24	23	22,5	20,5
Or. . . .	16	15,5	14	12,5	11,5	—	—
Zinc . . .	12,5	11	10	8,5	—	—	—
Plomb . .	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	—
Aluminium.	22	21	20	19	18	17	16
Étain. . .	6	—	5	—	4	—	3
Fer . . .	38	—	—	37	—	—	36

Température de 120°.

	2200 kg.	2400 kg.	2600 kg.	2800 kg.	3000 kg.	3200 kg.	3400 kg.
Argent . .	21	19	17	15	13	11	8
Platine . .	38	—	37	—	35	—	34
Palladium .	24	23	22	20	18,5	17	15
Cuivre . .	25	24	23	22,5	22	20,5	19,5
Or. . . .	14	13,5	13	11,5	10	9	8
Zinc . . .	7	6	5	4	—	—	—
Plomb . .	4,5	4,5	4	3,5	3	2,5	—
Aluminium .	19	18	17	16	15	14	13
Étain . . .	5	4,5	4	3,5	3	2,5	—
Fer . . .	37	—	—	36	—	—	35

Température de 170°.

	2200 kg.	2400 kg.	2600 kg	2800 kg.	3000 kg.	3200 kg.	3400 kg.
Argent . .	16	14	12	10	8	6	4
Platine . .	37,5	—	36,5	—	34,5	—	33,5
Palladium .	22,5	21,5	21	18	17,5	16	14,5
Cuivre . .	24	23	22	21,5	21	18,5	18
Or. . . .	12	11	10,5	10	8	—	—
Zinc . . .	—	—	—	—	—	—	—
Plomb . .	3,5	3	3	2,5	—	—	—
Aluminium .	16	15	14	13	12	11	10
Étain . . .	4	3,5	3	2,5	2	—	—
Fer . . .	36	—	—	35	—	—	34

Température de 220°.

	2200 kg.	2400 kg.	2600 kg.	2800 kg.	3000 kg.	3200 kg.	3400 kg.
Argent . .	10	8,5	7,5	6	4,5	3,5	2
Platine . .	37	—	36	—	35	—	34
Palladium .	21,5	19	18	17	16	15	14
Cuivre . .	22	21	20,5	19,5	19	18.5	18
Or. . . .	10	9,5	9	7,5	6,5	5	5
Zinc . . .	—	—	—	—	—	—	—
Plomb . .	2	2	2	—	—	—	—
Aluminium	13	12	11	10	9	8	7
Étain. . .	3	2,5	2	1,5	—	—	—
Fer . . .	34	—	—	33	—	—	32

Température de 270°.

	2200 kg.	2400 kg.	2600 kg.	2800 kg.	3000 kg.	3200 kg.	3400 kg
Argent . .	—	—	—	—	—	—	—
Platine . .	36,5	—	35,5	—	33,5	—	32,5
Palladium .	19	18	17,5	16	15	14	12
Cuivre . .	20,5	20	19,5	19	18	17	17
Aluminium .	10	9,5	9	8,5	8	7,5	7
Fer . . .	33	—	—	32	—	—	31

Température de 320°.

	2200 kg.	2400 kg.	2600 kg.	2800 kg.	3000 kg.	3200 kg.	3400 kg.
Platine . .	36	—	35	—	33	—	32
Palladium .	17	16	15	14	13	12	11
Fer . . .	32	—	—	31	—	—	30

CONCLUSIONS.

Nous voyons donc que les résultats obtenus confirment ce que nous avons dit pour le plomb, et de ce que nous avons expérimenté sur dix corps pris au hasard, si ce n'est que nous avons choisi de préférence des métaux usuels, nous pouvons en conclure la généralité de la loi. Nous dirons donc que :

1° Primitivement, les molécules ne sont pas dans un état d'équilibre normal et elles n'acquièrent cet état d'équilibre que lorsqu'il s'est produit un certain déplacement des molécules;

2° Le frottement intérieur est inversement proportionnel à la température. De plus, les courbes obtenues en reliant les points coïncidant avec le point de départ et le point final de l'irrégularité de la compression (courbes tracées en traits interrompus et qui sembleraient vouloir prendre la forme indiquée) nous montrent que :

A une température qui semblerait être voisine de — 150° à — 200°, la diminution de hauteur serait indépendante de la pression, ce qui signifierait qu'à cette température le corps serait pulvérisé et le frottement intérieur est infini.

Enfin, nous avons aussi remarqué que, par une cause qui nous paraît inexplicable, sur chaque cylindre aplati se dessinait exactement la surface supérieure qu'avait le cylindre avant notre expérience.

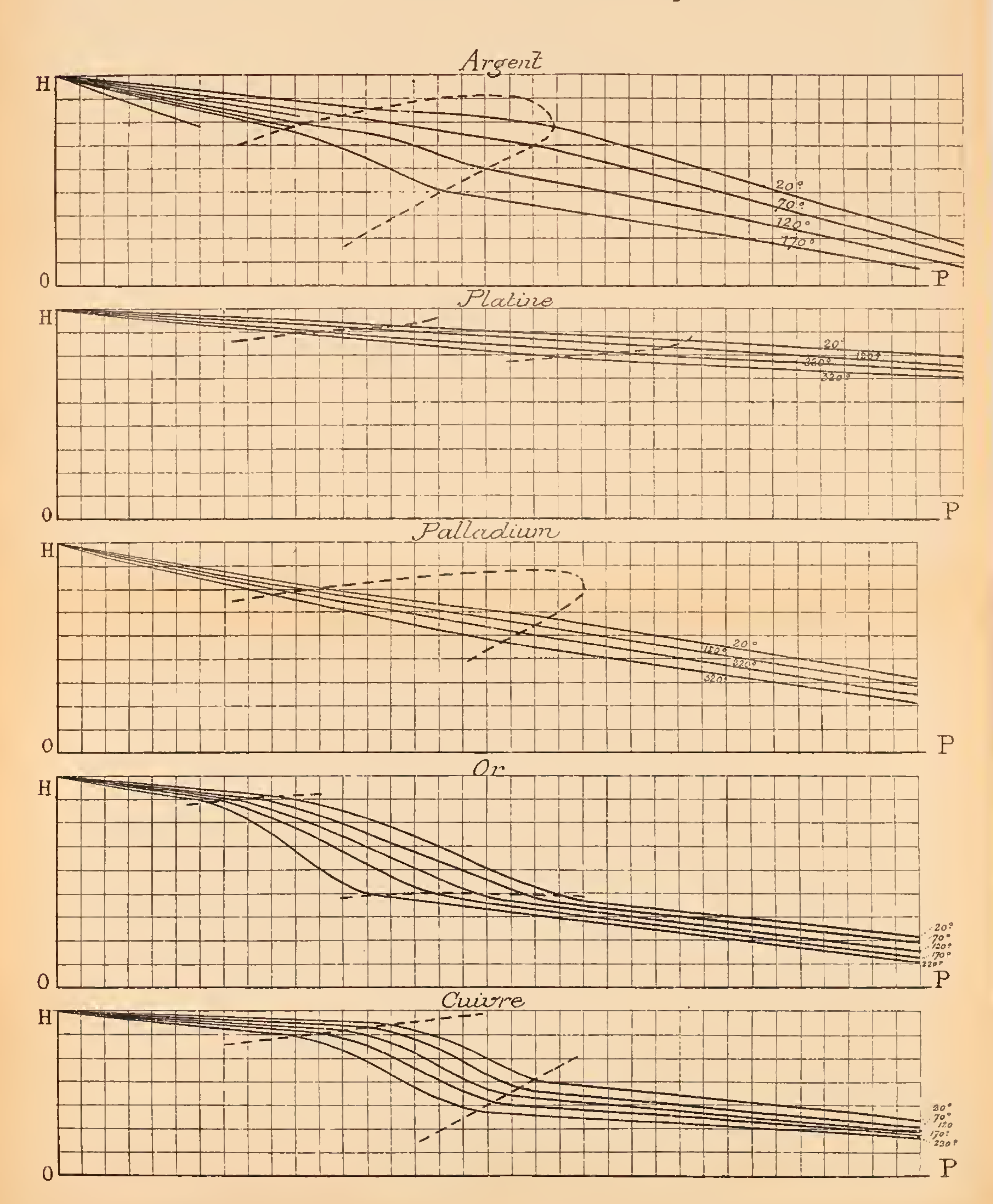
Nous avons aussi comparé le frottement intérieur à la variation de conductibilité électrique, au coefficient de dilatation et au volume moléculaire, mais nous avons obtenu des résultats trop incertains pour en faire mention.

Pour les expériences qui ont été faites, nous avons été guidé par notre savant maître, M. P. De Heen. C'est à ses conseils, à son expérience que nous devons la plupart des résultats concluants que nous avons obtenus; aussi l'en remercions-nous bien vivement.

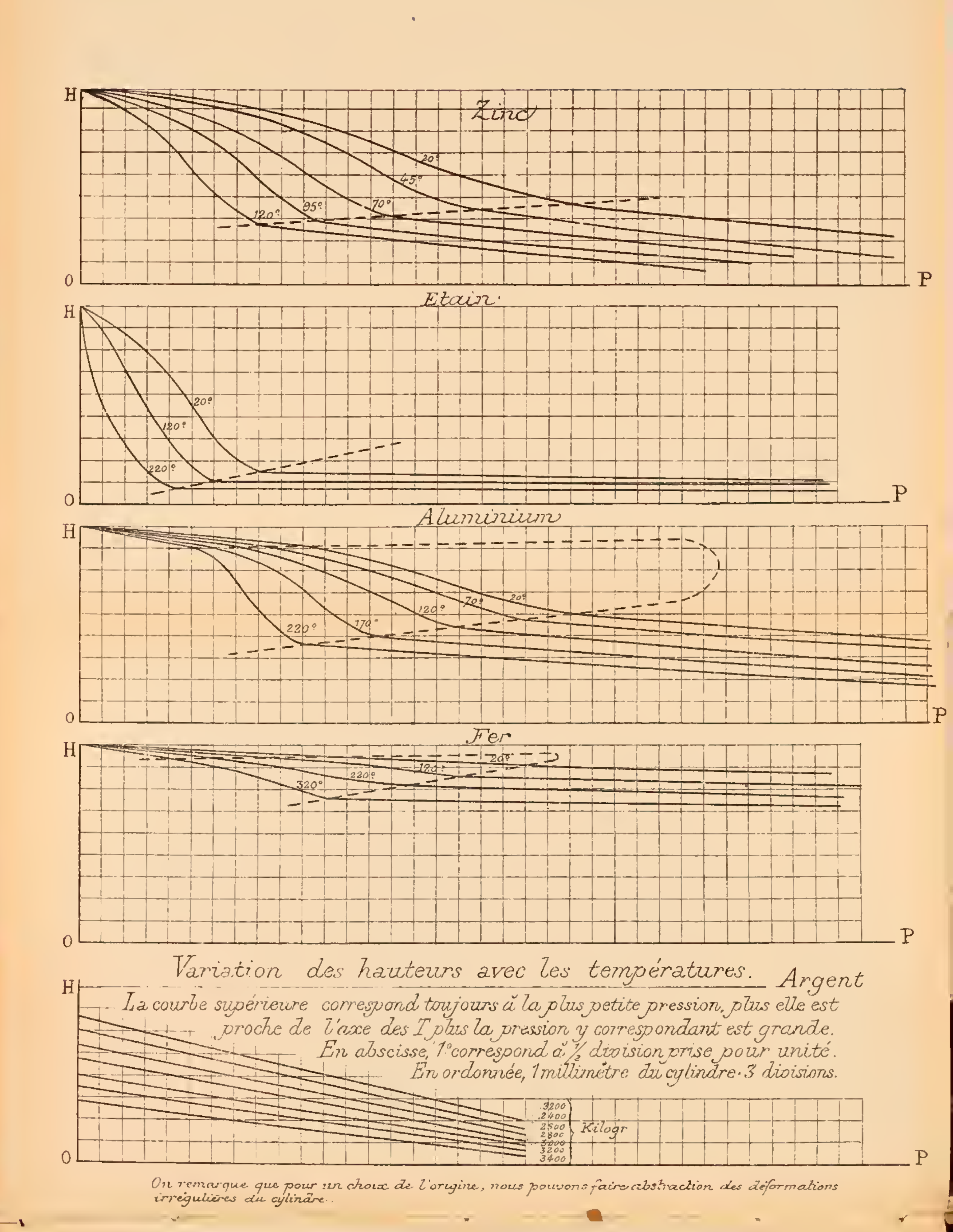
Variation des hauteurs avec les pressions.

En abscisse, 1 millimètre représente 20 kilogrammes.

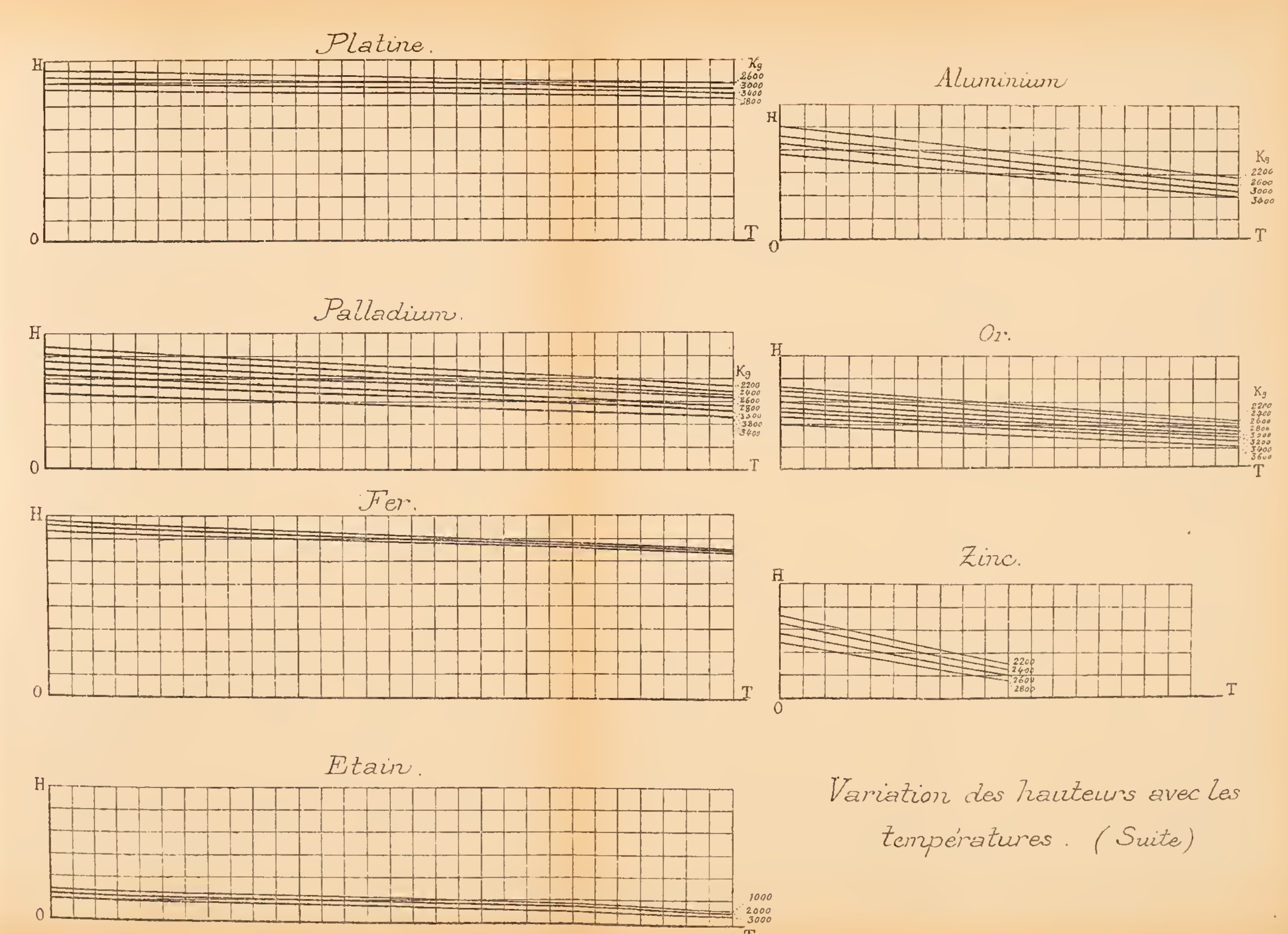
En ordonnée, 1 id de hauteur du cylindre représente 3 millimètres.



A. Camus. Mém. de la Soc. des Sc. de Liége. t. XX.



On remarque que pour un choix de l'origine, nous pouvons faire abstraction des déformations irrégulières du cylindre.



Variation des hauteurs avec les températures. (Suite)

SUR

LES COURBES SECTRICES

PAR

M. A. KEMPE

PROFESSEUR AU LYCÉE ÉRASME, A ROTTERDAM

SUR

LES COURBES SECTRICES

La division d'un angle quelconque en p parties égales a beaucoup occupé les géomètres. Le cas de $p = 2^n$ est traité dans les éléments de géométrie; on sait aujourd'hui que c'est le seul susceptible d'être résolu par la règle et le compas. Pour le cas de $p = 3$, on a proposé l'emploi de différentes courbes (*) : les coniques, le limaçon trisecteur, la trisectrice de Maclaurin, etc.

Nous allons indiquer la division d'un angle en $2^n + 1$ ou $2^n - 1$ parties égales au moyen de certaines courbes remarquables dont la construction ne présente pas de difficultés (**).

1. Soit Δ un cercle fixe (fig. 1), de centre M et de rayon R. Menons le diamètre OMY. Pour trouver la moitié d'un angle donné YMC, nous menons OC; alors $MCO = \frac{1}{2}$ YMC.

Une construction analogue sert à diviser l'angle YMC en $2^n + 1$ parties égales : on joint O au point de rencontre du côté MC avec certaines courbes qui dérivent du cercle Δ.

2. Sur chaque corde OA du cercle Δ, issue du point fixe O, portons dans les deux sens, à partir de l'extrémité A, les longueurs $AB = AB' = R$. Les points B et B′ décriront une même

(*) Voir, par exemple, Chasles, *Sections coniques*, p. 36; Delboeuf, *Mathesis*, t. III, p. 130; de Longchamps, *Journal de Mathematiques spéciales*, 1885, p. 176; *Géométrie de la règle et de l'équerre*, p. 102, et *Congrès de Besançon*, 1893, p. 190; Pirondini, *Mathesis*, t. XIV, p. 14; etc.

(**) Ces courbes sont des cas particuliers des courbes sectrices étudiées par M. Schoute, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, 1885. Nous les avions trouvées avant de connaître les recherches de M. Schoute.

courbe L_3, qui est un cas particulier du limaçon de Pascal, et que nous proposons d'appeler *limaçon trisecteur* (*).

Les triangles MOA, AMB étant isoscèles, on a

$$\textit{angle}\ \mathrm{MBO} = \frac{1}{2}\,\mathrm{MAO} = \frac{1}{2}\,\mathrm{MOB}\,;$$

d'où

$$\textit{angle}\ \mathrm{YMB} = \mathrm{MOB} + \mathrm{MBO} = 3\mathrm{MBO}.$$

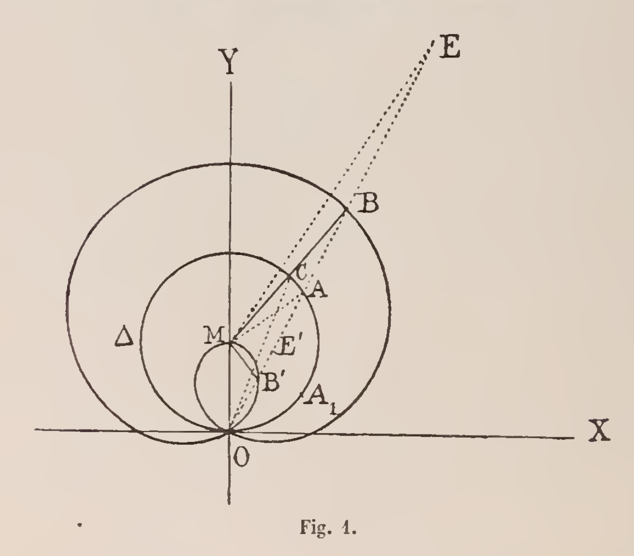


Fig. 1.

Ainsi, pour obtenir le tiers de l'angle YMB, on joint O au point B où le second côté de l'angle rencontre le limaçon ; MBO est l'angle cherché.

Cherchons la relation entre les angles YMB′ et MB′O. On trouve aisément :

$$\begin{aligned}\textit{angle}\ \mathrm{YMB'} &= \mathrm{MOB'} + \mathrm{OB'M} = \mathrm{MAO} + \mathrm{OB'M}\\ &= \pi - 2\mathrm{MB'A} + \mathrm{OB'M} = 3\mathrm{OB'M} - \pi\,;\end{aligned}$$

(*) A cause de la relation : *angle* YMB $= \frac{3}{2}$ YOB, M. Schoute (*loc. cit.*, p. 223) a proposé le nom de *sesquisectrice*.

ainsi

$$OB'M = \frac{\pi + YMB'}{3},$$

donc OB'M est le tiers de l'angle *concave* OMB'.

Posons

$$OB = \rho, \quad MB = r, \quad \textit{angle}\ MOB = \omega, \quad YMB = u.$$

Nous aurons d'abord pour équation du limaçon L_3, le pôle étant en O et l'axe polaire dirigé suivant OY :

$$\rho = R(2 \cos \omega + 1).$$

Si l'on place l'origine en M, on déduit du triangle MOB :

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin \omega}{\sin \frac{u}{3}};$$

d'où, à cause de $\omega = \frac{2u}{3}$,

$$r = 2R \cos \frac{u}{3}.$$

Le limaçon L_3 possède en O un point double; les tangentes en ce point font avec OY un angle de 60°. Car, si la perpendiculaire au milieu de OM rencontre Δ en A_1, OA_1 est la position de OB' qui correspond à A confondu avec A_1 et à B' confondu avec O.

3. Après avoir construit le limaçon L_3 (fig. 1) en portant sur une corde quelconque OA du cercle Δ les longueurs AB $=$ AB' $=$ AM, prenons sur la même droite OB les longueurs

$$BE = BE' = BM, \quad B'F = B'F' = B'M \ (^*).$$

(*) Les points F et F' n'ont pas été marqués, pour ne pas surcharger la figure. Il en est de même des points H, H', K, K', ... dont il est question ci-après.

Les points E, E′, F, F′ décriront une même courbe L_5 (fig. 2).

Nous désignons maintenant par ω, *u* les angles MOE, YME (fig. 1) et par ρ, *r* les distances OE, ME. Alors les triangles isoscèles BME, AMB, MOA donnent :

$$\textit{angle}\ \text{MEO} = \frac{1}{2}\text{MBA} = \frac{1}{4}\text{MAO} = \frac{1}{4}\omega;$$

par suite :

$$u = \text{YOE} + \text{MEO} = \frac{5}{4}\omega; \quad \text{MEO} = \frac{1}{5}\text{YME}.$$

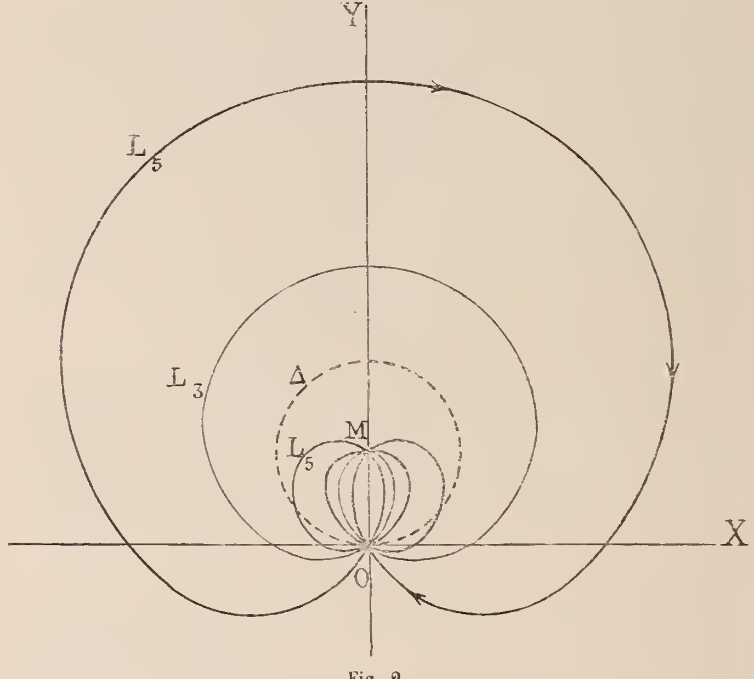


Fig. 2.

On voit comment la courbe L_5 peut servir à trouver le cinquième d'un angle donné.

Les angles ME′O, MFO, MF′O s'expriment très simplement en fonction des angles YME′, YMF, YMF′ ; nous laissons au lecteur le soin d'établir ces relations.

On a, dans le triangle OME,

$$\frac{\rho}{\sin u} = \frac{r}{\sin \omega} = \frac{R}{\sin \frac{1}{5} u};$$

d'où l'on conclut

$$\rho = R \frac{\sin \frac{5}{4} \omega}{\sin \frac{1}{4} \omega}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$r = R \frac{\sin \frac{4}{5} u}{\sin \frac{1}{5} u} = 4R \cos \frac{1}{5} u \cos \frac{2}{5} u \quad \ldots \quad (2)$$

Telles sont les équations polaires de L_5, l'origine étant respectivement en O ou M; l'axe polaire est OY.

La perpendiculaire au milieu de OM rencontre L_5 en quatre points; les droites joignant O à ces points sont les tangentes de L_5 au point O; c'est ce qui résulte de la construction de la courbe. L'équation (1) conduit à la même conclusion : ρ s'annule pour

$$\omega = \frac{4\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{12\pi}{5}, \frac{16\pi}{5}.$$

Le point M est également un point multiple, avec une tangente perpendiculaire à OY et deux autres faisant avec MY un angle de 45°. En effet, d'après l'équation (2), r s'annule pour

$$u = \frac{5\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{4}.$$

4. De la courbe L_5 nous déduisons une nouvelle courbe en portant sur la corde OA (fig. 1) les longueurs

$$EH = EH' = EM, \quad E'K = E'K' = E'M, \quad FL = FL' = FM, \quad \text{etc.}$$

Les points H, H′, K, K′, ... décrivent une même courbe L_9. On a :

$$\text{angle MHO} = \frac{1}{2}\text{MEO} = \frac{1}{8}\omega,$$

$$\text{YMH} = \text{YOH} + \text{MHO} = \frac{9}{8}\omega;$$

donc

$$\text{MHO} = \frac{1}{9}\text{YMH}.$$

La courbe L_9 a pour équations polaires

$$\rho = \mathrm{R}\frac{\sin\frac{9}{8}\omega}{\sin\frac{1}{8}\omega}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$r = \mathrm{R}\frac{\sin\frac{8}{9}u}{\sin\frac{1}{9}u} = 8\mathrm{R}\cos\frac{1}{9}u\cos\frac{2}{9}u\cos\frac{4}{9}u, \quad \ldots \quad (4)$$

le pôle étant respectivement en O ou en M.

Les points O et M sont des points multiples. On détermine facilement les tangentes en ces points en cherchant les valeurs de ω ou u pour lesquelles $\rho = 0$ ou $r = 0$. Ces valeurs résultent de

$$\frac{9}{8}\omega = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, 8\pi,$$

$$\frac{8}{9}u = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, 7\pi;$$

on peut prendre, pour plus de simplicité,

$$\omega = \pm\frac{\pi}{9}, \pm\frac{2\pi}{9}, \pm\frac{3\pi}{9}, \pm\frac{4\pi}{9};$$

$$u = \pm\frac{\pi}{8}, \pm\frac{2\pi}{8}, \pm\frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}.$$

5. En continuant ainsi, on obtient des courbes L_{17}, L_{33}, ... qui peuvent servir à diviser un angle en 17, 33, ... parties égales. Les équations polaires de ces lignes sont

$$\rho = R \frac{\sin \frac{2^n + 1}{2^n} \omega}{\sin \frac{1}{2^n} \omega},$$

$$r = R \frac{\sin \frac{2^n}{2^n + 1} u}{\sin \frac{1}{2^n + 1} u},$$

l'origine étant respectivement en O ou M ; l'axe polaire est OY.

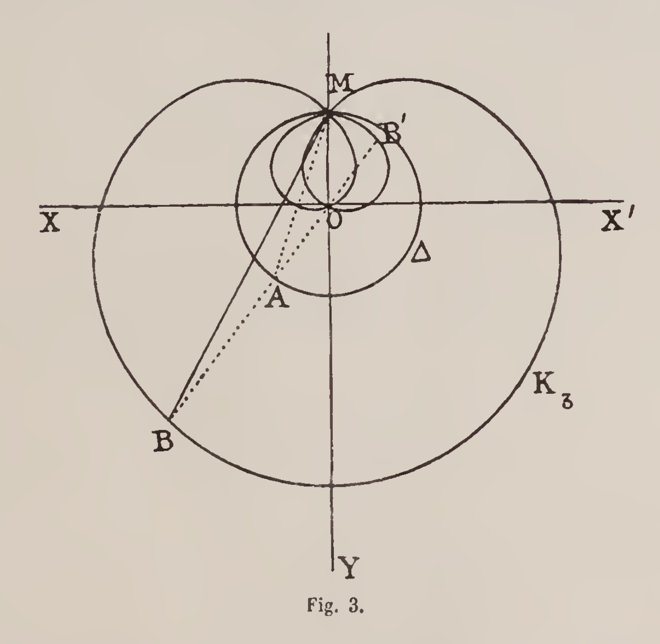


Fig. 3.

6. Considérons de nouveau un cercle fondamental Δ (fig. 3), de rayon R. Nous désignons maintenant par O le centre et par M un point fixe de la circonférence.

Menons un rayon quelconque OA et prenons sur cette droite les longueurs $AB = AB' = AM$. Les points B et B′ décriront une même courbe K_3.

Les triangles isoscèles OAM, ABM donnent :

$$\textit{angle}\ \mathrm{OBM} = \mathrm{BMA} = \frac{1}{2}\mathrm{MAO} = \frac{1}{2}\mathrm{AMO} = \frac{1}{4}\mathrm{YOB};$$

par conséquent :

$$\textit{angle}\ \mathrm{OBM} = \frac{1}{3}\mathrm{YMB}.$$

On voit que la courbe K_3 peut servir à diviser un angle en trois parties égales.

Posons :

$$\mathrm{MB} = \rho, \quad \text{angle OMB} = \omega, \quad \mathrm{OB} = r, \quad \textit{angle}\ \mathrm{YOB} = u;$$

le triangle OMB donne

$$\frac{\rho}{\sin u} = \frac{\mathrm{R}}{\sin \mathrm{OBM}} = \frac{r}{\sin \omega}.$$

Par suite

$$\rho = \mathrm{R}\frac{\sin\frac{4}{3}\omega}{\sin\frac{\omega}{3}} = 4\mathrm{R}\cos\frac{\omega}{3}\cos\frac{2\omega}{3};$$

$$r = \mathrm{R}\frac{\sin\frac{3}{4}u}{\sin\frac{1}{4}u} = \mathrm{R}\left(3 - 4\sin^2\frac{1}{4}u\right)$$

$$= \mathrm{R}\left(1 + 2\cos\frac{1}{2}u\right).$$

Les rayons vecteurs ρ, r sont nuls pour

$$\frac{4}{3}\omega = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi;$$

$$\frac{3}{4}u = \pi,\ 2\pi;$$

les valeurs correspondantes de ω et u font connaître les tangentes aux points M et O.

7. Après avoir construit la courbe K_3 (fig. 3), nous portons sur OA les longueurs (*)

$$BC = BC' = BM, \quad B'D = B'D' = B'M.$$

Les points C, C′, D, D′ décrivent une même courbe K_7 servant à diviser un angle en 7 parties égales ; car

$$\textit{angle}\ OCM = \frac{1}{2} OBM = \frac{1}{4} OAM = \frac{1}{8} YOC,$$

$$\textit{angle}\ YMC = YOC - OCM = 7OCM.$$

Une construction analogue déduira de K_7 une courbe K_{15} servant à trouver le $\frac{1}{15}$ d'un angle donné. Et ainsi de suite.

La courbe K d'indice $2^n - 1$ a pour équations

$$\rho = R\frac{\sin\frac{2^n}{2^n-1}\omega}{\sin\frac{1}{2^n-1}\omega},$$

$$r = R\frac{\sin\frac{2^n-1}{2^n}u}{\sin\frac{1}{2^n}u},$$

(*) Le lecteur est prié de compléter la figure 3

l'origine étant respectivement en M ou en O. M est un point multiple d'ordre $2^n - 1$, et O est d'ordre $2^n - 2$, car les directions des tangentes en ces points sont déterminées par les valeurs de ω ou u qui annulent ρ ou r.

8. Cherchons l'équation cartésienne des courbes L, les axes coordonnés ayant la position indiquée dans la figure 1.

Appelons P le point générateur de la courbe L, d'indice 2^n+1, et désignons par ω, u, α les angles POY, PMY, OPM. Nous aurons

$$\omega = 2^n\alpha, \quad u = (2^n + 1)\alpha.$$

Une formule connue donne, en représentant 2^n par m,

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg} m\alpha = \frac{C_m^1 \operatorname{tg}\alpha - C_m^3 \operatorname{tg}^3\alpha + \cdots - C_m^{m-1} \operatorname{tg}^{m-1}\alpha}{1 - C_m^2 \operatorname{tg}^2\alpha + \cdots + C_m^m \operatorname{tg}^m\alpha}. \quad (5)$$

D'ailleurs

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{x}{y}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{x}{y - R},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(u - \omega) = \frac{Rx}{x^2 + y^2 - Ry}.$$

Portons les valeurs de $\operatorname{tg}\omega$ dans la relation (5); nous aurons, après suppression du facteur x commun aux deux membres, une équation de degré $2m = 2^{n+1}$.

Par exemple, pour le limaçon trisecteur on a successivement :

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2Rx(x^2 + y^2 - Ry)}{(x^2 + y^2 + Ry)^2 - R^2x^2},$$

$$(x^2 + y^2 - 2Ry)^2 - R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

9. Nous rapportons les courbes K aux axes indiqués dans la figure 3.

Soit P le point générateur de la courbe K, d'indice $2^n - 1$, et soient ω, u, α les angles POY, PMY, OPM. Alors

$$\omega = 2^n\alpha, \quad u = (2^n - 1)\alpha,$$

et en désignant $2^n - 1$ par m :

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} m\alpha = \frac{C_m^1 \operatorname{tg}\alpha - C_m^3 \operatorname{tg}^3\alpha + \cdots - C_m^m \operatorname{tg}^m\alpha}{1 - C_m^2 \operatorname{tg}^2\alpha + \cdots - C_m^{m-1} \operatorname{tg}^{m-1}\alpha}. \quad (6)$$

Or

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{x}{y}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{x}{y + R},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\omega - u) = \frac{Rx}{x^2 + y^2 + Ry}.$$

L'équation de la courbe K s'obtient en portant ces valeurs de $\operatorname{tg} u$ et $\operatorname{tg}\alpha$ dans l'égalité (6). Elle est de degré $2m = 2(2^n - 1)$.

10. Nous allons montrer maintenant que les courbes K et L peuvent servir à diviser un angle donné en un nombre quelconque p de parties égales.

Supposons d'abord que p soit un nombre premier (impair). D'après le théorème de Fermat, p divise $2^{p-1} - 1$, et par suite l'un des nombres $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} + 1$; s'il divise $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ et que $\frac{p-1}{2}$ est un nombre pair, il devra diviser l'un des nombres $2^{\frac{p-1}{4}} - 1$ ou $2^{\frac{p-1}{4}} + 1$. Continuons ainsi jusqu'à ce que nous trouvions le plus petit nombre de la forme $2^\mu - 1$ ou $2^\mu + 1$ qui soit divisible par p, et soit q le quotient ; nous aurons

$$2^\mu \mp 1 = pq, \quad \frac{1}{p} = \frac{q}{2^\mu \mp 1}.$$

Donc pour trouver le p^e d'un angle donné, nous prendrons q parties de l'angle divisé en $2^\mu \mp 1$ parties égales.

Par exemple,

$$\frac{1}{11}=\frac{3}{33}=\frac{3}{2^5+1},\quad \frac{1}{13}=\frac{5}{65}=\frac{5}{2^6+1},\quad \frac{1}{19}=\frac{27}{2^9+1},$$

$$\frac{1}{23}=\frac{89}{2^{11}-1},\quad \frac{1}{29}=\frac{565}{2^{14}+1},\quad \text{etc.}$$

Si p est un nombre composé, comprenant les facteurs premiers α, β, γ, ..., la question se ramène à la division d'un angle en α, β, γ, ... parties égales.

SUR QUELQUES POINTS

DE LA

THÉORIE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

PAR

I.-H. PHILIPPOT

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

SUR QUELQUES POINTS

DE LA

THÉORIE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

Le travail actuel a pour objet l'étude de différents procédés de formation de systèmes transformables; plus particulièrement, nous considérerons des systèmes cogrédients aux produits de variables et aux coefficients de formes algébriques.

I. Préliminaires. Soit $p_1, p_2 \dots p_r$ un système de fonctions algébriques, rationnelles et entières, des variables $x_1, x_2 \dots x_n$ et des coefficients a de formes algébriques relatives à des variables telles que (x). Soient $P_1, P_2 \dots P_r$ les fonctions que l'on déduit de $p_1, p_2 \dots p_r$, en remplaçant les éléments (a) et (x) par leurs transformées (A) et (X), après la substitution

$$x_i = \alpha_{i1}X_1 + \alpha_{i2}X_2 + \cdots + \alpha_{in}X_n,$$
$$i = 1, 2 \dots n,$$

dont le module

$$\delta = \pm (\alpha_{11}\alpha_{22} \dots \alpha_{nn})$$

est quelconque.

Le système (p) est *transformable* si l'on a des relations linéaires :

$$p_1 = \theta_{11}P_1 + \theta_{12}P_2 + \cdots + \theta_{1r}P_r,$$
$$p_2 = \theta_{21}P_1 + \theta_{22}P_2 + \cdots + \theta_{2r}P_r,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$p_r = \theta_{r1}P_1 + \theta_{r2}P_2 + \cdots + \theta_{rr}P_r,$$

où les lettres θ représentent des fonctions des paramètres α.

Un système $p'_1, p'_2 \dots p'_r$ est dit *cogrédient* au système (p) si l'on a les formules

$$\delta^\varepsilon p'_j = \theta_{j1}P'_1 + \theta_{j2}P'_2 + \cdots + \theta_{jr}P'_r,$$
$$j = 1, 2, \dots r.$$

Un système $q_1, q_2 \dots q_r$ est dit *contragrédient* au système (p) si l'on a

$$\delta^\varepsilon Q_j = \theta_{1j}q_1 + \theta_{2j}q_2 + \cdots + \theta_{rj}q_r,$$
$$j = 1, 2, \dots r,$$

les lettres Q désignant les transformées des quantités q.

Nous rappellerons les théorèmes suivants dont nous aurons à faire usage :

1° Si la fonction

$$\varphi = p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_rq_r$$

est invariante, les systèmes (p) et (q) sont contragrédients, quand ils dépendent d'éléments différents et que le nombre r est réduit au minimum.

2° Réciproquement, la somme des produits pq de deux systèmes contragrédients est une fonction invariante.

3° Si une fonction invariante φ est exprimable, et d'une seule manière, comme fonction entière des quantités transformables $(p1)$, $(p2)\dots$, on n'altère pas la propriété d'invariance en remplaçant dans φ les quantités $(p1)$, $(p2)\dots$ par des quantités cogrédientes $(p'1)$, $(p'2)\dots$ (*).

II. Transmutation des systèmes transformables. Le principe de la transmutation des fonctions invariantes qui consiste à remplacer, dans une fonction invariante, un système de quantités transformables linéairement par un système cogrédient, est

(*) Pour la démonstration de ces théorèmes, voir J. Deruyts, *Essai d'une théorie générale des formes algébriques*, pp. 20 et suiv.

immédiatement applicable aux systèmes transformables eux-mêmes.

Supposons, en effet, que le système $(p_1, p_2 \dots p_r)$ soit linéairement indépendant et s'exprime d'une seule manière à l'aide des éléments ou, plus généralement, des fonctions transformables (ω). Remplaçons dans $(p_1, p_2 \dots p_r)$ les (ω) par des quantités cogrédientes (ω'); nous obtenons un système de nouvelles quantités $(p'_1, p'_2 \dots p'_r)$ dépendant des (ω') de la même manière que les $(p_1, p_2 \dots p_r)$ dépendent des (ω). Les (p) et les (p') sont cogrédients.

En effet, au système (p), on peut faire correspondre un système contragrédient (q) linéairement indépendant, relatif à des éléments différents et tel que

$$\varphi = \sum pq = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_r q_r$$

soit une fonction invariante (*). La fonction φ s'exprime d'une seule manière au moyen des fonctions (p) et, par suite, au moyen des (ω); par conséquent, nous pouvons substituer dans φ aux (ω) leurs cogrédients (ω') (§ II, 3°); alors les (p) deviennent les (p') et la fonction φ devient

$$\varphi_1 = \sum p'q = p'_1 q_1 + p'_2 q_2 + \cdots + p'_r q_r$$

et reste invariante. Les expressions de φ et φ_1 montrent que les systèmes (p) et (p') sont cogrédients comme contragrédients à un même système (q) (§ II, 1° et 2°).

III. Systèmes transformables ayant des combinaisons linéaires cogrédientes. Si deux systèmes transformables (ω) et (ω') sont cogrédients, leurs combinaisons linéaires $p(\omega)$ et $p(\omega')$ semblables ont la même propriété.

Inversement, si des combinaisons linéaires semblables $p(\omega)$, $p(\omega')$ sont indépendantes linéairement et sont cogrédientes, les

(*) Voir J. Deruyts, *Sur les fonctions invariantes associées à un système transformable.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1896 n° 7, p. 87.)

systèmes (ω) et (ω') sont également cogrédients, puisque les (ω) et les (ω') sont respectivement des combinaisons linéaires des $p(\omega)$ et des $p(\omega')$.

Toutefois, il faut que le nombre des quantités $p(\omega)$ soit égal au nombre des quantités (ω). Dans le cas contraire, la propriété indiquée ne se vérifie plus

IV. Considérons un système transformable $(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_\rho)$. Soit $p_1(\omega) \dots p_r(\omega)$ un système de quantités dépendant linéairement des $(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_\rho)$ et tel que r soit plus petit que ρ ; nous supposerons en outre le système des (p) linéairement transformable. Nous pouvons joindre aux fonctions $(p_1, p_2 \dots p_r)$ d'autres quantités analogues $(p_{r+1}, p_{r+2} \dots p_\rho)$ dépendant aussi des $(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_\rho)$, de telle manière que le système total $(p_1 \dots p_r p_{r+1} \dots p_\rho)$ forme un système transformable, linéairement indépendant, d'après le tableau suivant :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \theta_{11}P_1 + \theta_{12}P_2 + \cdots + \theta_{1r}P_r,\\
p_2 &= \theta_{21}P_1 + \theta_{22}P_2 + \cdots + \theta_{2r}P_r,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
p_r &= \theta_{r1}P_1 + \theta_{r2}P_2 + \cdots + \theta_{rr}P_r,\\
p_{r+1} &= \theta_{r+11}P_1 + \theta_{r+12}P_2 + \cdots + \theta_{r+1r}P_r + \theta_{r+1r+1}P_{r+1} + \cdots + \theta_{r+1\rho}P_\rho,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
p_\rho &= \theta_{\rho 1}P_1 + \theta_{\rho 2}P_2 + \cdots + \theta_{\rho r}P_r + \theta_{\rho r+1}P_{r+1} + \cdots + \theta_{\rho\rho}P_\rho.
\end{aligned}$$

Ainsi $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_\rho$ sont exprimables linéairement au moyen des $p_1, p_2 \dots p_\rho$

En désignant par les lettres λ des constantes, posons

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= p_{r+1} + \lambda_{11}p_1 + \cdots + \lambda_{r1}p_r\\
\pi_2 &= p_{r+2} + \lambda_{12}p_1 + \cdots + \lambda_{r2}p_r\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\pi_{\rho-r} &= p_\rho + \lambda_{1\rho-r}p_1 + \cdots + \lambda_{r\rho-r}p_r.
\end{aligned}$$

Nous pouvons disposer des multiplicateurs λ de telle sorte

que les termes en $P_1, P_2 \dots P_r$ soient nuls dans les expressions $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{\rho-r}$. En effet, les équations

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{11}\theta_{11} + \lambda_{21}\theta_{21} + \cdots + \lambda_{r1}\theta_{r1} = -\theta_{r+11} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{11}\theta_{1r} + \lambda_{21}\theta_{2r} + \cdots + \lambda_{r1}\theta_{rr} = -\theta_{r+1r} \end{array}\right\}$$

donneront pour $\lambda_{11}\lambda_{21} \dots \lambda_{r1}$ des valeurs finies et déterminées, puisque le déterminant

$$(\pm\, \theta_{11}\theta_{22} \dots \theta_{rr})$$

étant le déterminant d'un système transformable $(p_1, p_2 \dots p_r)$ est une puissance du module δ de la transformation linéaire des variables, et par suite est différent de zéro.

Nous aurons ainsi

$$\begin{array}{ll} p_1 = \theta_{11}P_1 + \theta_{12}P_2 + \cdots + \theta_{1r}P_r & \\ p_2 = \theta_{21}P_1 + \theta_{22}P_2 + \cdots + \theta_{2r}P_r & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ p_r = \theta_{r1}P_1 + \theta_{r2}P_2 + \cdots + \theta_{rr}P_r & \\ \pi_1 = & \theta^0_{r+1,r+1}P_{r+1} + \cdots + \theta^0_{r+1\rho}P_\rho \\ \pi_2 = & \theta^0_{r+2,r+1}P_{r+1} + \cdots + \theta^0_{r+2\rho}P_\rho \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \pi_{\rho-r} = & \theta^0_{\rho r+1}P_{r+1} + \cdots + \theta^0_{\rho\rho}P_\rho \end{array}$$

les lettres (θ^0) désignant de nouvelles quantités analogues à θ. Le déterminant des dernières équations s'obtient au moyen de $(\pm\, \theta_{11}, \theta_{22} \dots \theta_{\rho\rho})$, en ajoutant aux rangées d'ordre $r+1$, $r+2, \dots \rho$ des combinaisons linéaires des rangées d'ordre $1, 2, \dots r$; donc, le déterminant du système $(p_1 \dots p_r \pi_1 \dots \pi_{\rho-r})$ est égal à $(\pm\, \theta_{11}, \theta_{22} \dots \theta_{\rho\rho})$ et est ainsi différent de zéro. En conséquence, on a

$$(\pm\, \theta^0_{r+1r+1}\theta^0_{r+2r+2} \dots \theta^0_{\rho\rho}) \gtrless 0.$$

D'après la dernière relation, les $\rho - r$ dernières équations du système précédent permettent d'exprimer $P_{r+1}, P_{r+2} \dots P_\rho$ linéairement en $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{\rho-r}$. Si l'on suppose que la substitution des variables devient identique, les P deviennent p; donc $p_{r+1}, p_{r+2} \dots p_\rho$ sont exprimables par des combinaisons linéaires de $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{\rho-r}$ à coefficients numériques. Les transformées $P_{r+1} \dots P_\rho$ sont exprimables de même en $\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{\rho-r}$. Si l'on remplace $P_{r+1} \dots P_\rho$ par leurs valeurs en $\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{\rho-r}$ dans $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{\rho-r}$, on a

$$\pi_1 = \theta'_{r+1\,r+1}\Pi_1 + \cdots + \theta'_{r+1\,\rho}\Pi_{\rho-r},$$
$$\pi_2 = \theta'_{r+2\,r+1}\Pi_1 + \cdots + \theta'_{r+2\,\rho}\Pi_{\rho-r},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pi_{\rho-r} = \theta_{\rho\,r+1}\Pi_1 + \cdots + \theta'_{\rho\rho}\Pi_{\rho-r}.$$

Donc, si $(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_\rho)$ est un système transformable, et si certaines combinaisons linéaires $[p_1(\omega) \dots p_r(\omega)]$, en nombre r plus petit que ρ, forment un système partiel transformable, on peut former un autre système partiel transformable à $\rho - r$ termes : $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{\rho-r}$.

La réduction du système (p) aux deux systèmes $(p_1, p_2 \dots p_r)$ et $(\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{\rho-r})$ conduit immédiatement à cette conséquence : *Si* (ω) *et* (ω') *sont deux systèmes transformables et si les combinaisons linéaires* $p_1(\omega'), p_2(\omega') \dots p_r(\omega')$, *sont cogrédientes aux combinaisons* $p_1(\omega), p_2(\omega) \dots p_r(\omega)$, *les deux systèmes* (ω) *et* (ω') *se subdivisent en systèmes partiels* $p(\omega), \pi(\omega)$ *et* $p(\omega'), \pi'(\omega')$ *dont les premiers sont cogrédients, tandis que les seconds* $\pi(\omega)$ *et* $\pi'(\omega')$ *contiennent seulement le même nombre de termes.*

V. Systèmes transformables résultant d'un système donné par combinaisons de déterminants. De même que les variables (x), les termes (p) d'un système transformable sont en relation linéaire avec leurs transformées P; par analogie avec une propriété bien connue des variables (x), on peut énoncer cette proposition :

Si $(p'), (p'') \dots (p^i)$ *sont des systèmes transformables composés de la même manière au moyen d'éléments semblables* $(e'), (e'') \dots (e^i)$,

les déterminants d'ordre i (i $\overline{\gtrless}$ r) *formés au moyen du tableau rectangulaire*

$$\left\|\begin{matrix} p'_1 & p'_2 & \dots & p'_r \\ p''_1 & p''_2 & \dots & p''_r \\ . & . & . & . \\ p^i_1 & p^i_2 & \dots & p^i_r \end{matrix}\right\| \qquad (A_i)$$

sont les termes d'un nouveau système transformable.

Pour le cas particulier de $i = r$, le système se réduit à un seul terme :

$$\varphi = (\pm\, p'_1, p''_2 \dots p^r_r)$$

qui est par suite une fonction invariante.

Considérons encore le tableau

$$\left\|\begin{matrix} q'_1 & q'_2 & \dots & q'_r \\ q''_1 & q''_2 & \dots & q''_r \\ . & . & . & . \\ q^i_1 & q^i_2 & \dots & q^i_r \end{matrix}\right\| \qquad (B_i)$$

formé au moyen des termes de systèmes $(q'), (q'') \dots (q^i)$ semblables entre eux et contragrédients à (p). On vérifie facilement que les déterminants formés au moyen de (A_i) et de (B_i) sont contragrédients entre eux.

Pour $i = r$, le déterminant

$$\varphi_1 = (\pm\, q'_1 q''_2 \dots q^r_r)$$

est du reste une fonction invariante.

VI. *Les sous-déterminants complémentaires d'ordres* i *et* r — i *dans les déterminants* φ *et* φ_1 *sont cogrédients.*

En effet, soit par exemple $i = 2$. En développant le déterminant φ, on a

$$\begin{vmatrix} p_1' p_2' \\ p_1'' p_2'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_3''' \dots p_r''' \\ p_3^{\text{IV}} \dots p_r^{\text{IV}} \\ \dots \\ p_3^r \dots p_r^r \end{vmatrix} + \text{etc.} = \varphi.$$

D'un autre côté (§ V), la somme des produits des déterminants correspondants d'ordre $r - 2$, qui se déduisent des tableaux rectangulaires formés par les $r - 2$ dernières rangées des déterminants φ et φ_1, est une fonction invariante φ_1', c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{vmatrix} q_3''' \dots q_r''' \\ q_3^{\text{IV}} \dots q_r^{\text{IV}} \\ \dots \\ q_3^r \dots q_r^r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_3''' \dots p_r''' \\ p_2^{\text{IV}} \dots p_r^{\text{IV}} \\ \dots \\ p_3^r \dots p_r^r \end{vmatrix} + \text{etc.} = \varphi_1'.$$

Il résulte de la forme des fonctions invariantes φ et φ_1' que les systèmes de sous-déterminants tels que

$$\begin{vmatrix} p_1' p_2' \\ p_1'' p_2'' \end{vmatrix} \dots \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} q_3''' \dots q_r''' \\ \dots \\ q_3^r \dots q_r^r \end{vmatrix} \dots$$

sont cogrédients.

VII. Les résultats précédents s'appliquent immédiatement. En effet, soit p_1 une fonction rationnelle, entière, homogène et isobarique dépendant des coefficients de formes algébriques. La transformée de p_1 peut toujours s'écrire

$$P_1 = \theta_{11} p_1 + \theta_{12} p_2 + \cdots + \theta_{1r} p_r,$$

où les θ dépendent des paramètres α et les $p_2 \ldots p_r$ sont analogues à p_1. Si le nombre r des termes est réduit au minimum, $p_1, p_2 \ldots p_r$ forment un système transformable (*).

VIII. Quelques systèmes cogrédients aux coefficients de formes algébriques et aux produits de variables. Dans le but de donner quelques applications de la transmutation des systèmes transformables, nous rappellerons les théorèmes suivants (**) :

1° *Les coefficients* $(a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$ *d'une forme algébrique quelconque à* n *variables sont cogrédients aux dérivées* $\frac{d^{\alpha}\varphi}{dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}\ldots dx_n^{\alpha_n}}$, φ *étant une fonction invariante quelconque.*

2° *Le système* $(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n})$ *est cogrédient au système* $\frac{1}{\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}\frac{d\varphi}{da_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}$, $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$ *étant le coefficient polynomial associé à* $\alpha_{\alpha_1\alpha_2\ldots}$.

3° *Les produits de dérivées premières de fonctions invariantes quelconques* $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ *sont cogrédients aux dérivées multiples correspondantes de* φ, *ces dérivées étant relatives soit aux variables, soit aux coefficients.*

Pour éviter des formules trop compliquées, nous nous bornerons au cas de formes binaires ($n = 2$). Il sera du reste facile d'étendre les énoncés au cas d'un nombre quelconque n de variables. Dans la suite, les lettres a, b, c seront employées pour désigner les coefficients de formes d'ordres α, β, $\beta-\alpha$ ou $\alpha-\beta$. Les caractéristiques ζ représenteront des coefficients numériques dont la détermination est peu importante. Enfin ε indiquera en abrégé des nombres binomiaux.

IX. *Si l'on a* $\beta > \alpha$, *les coefficients* $a_{\alpha_1\alpha_2}$ *sont cogrédients aux quantités*

$$\sum b_{\beta_1\beta_2}\frac{d\varphi'}{dc_{\beta_1-\alpha_1,\beta_2-\alpha_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et

$$\sum \zeta\frac{d\varphi_1}{dx_1^{\beta_1}dx_2^{\beta_2}}x_1^{\beta_1-\alpha_1}x_2^{\beta_2-\alpha_2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

(*) J. Deruyts, *Essai d'une théorie générale des formes algébriques.*
(**) *Ibidem.*

En effet, nous savons que les coefficients a sont cogrédients aux dérivées

$$D = \frac{d^{\alpha}\varphi}{dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

si l'on prend pour φ une forme d'ordre β, on obtient pour les dérivées D les sommes

$$\sum \varepsilon b_{\beta_1\beta_2} x_1^{\beta_1-\alpha_1} x_2^{\beta_2-\alpha_2},$$

à part un facteur constant. D'après le principe de transmutation des systèmes transformables, on peut remplacer les produits $\varepsilon x_1^{\beta_1-\alpha_1} x_2^{\beta_2-\alpha_2}$ par les dérivées $\frac{d\varphi'}{dc}$ et ainsi les sommes

$$\sum b_{\beta_1\beta_2} \frac{d\varphi'}{dc_{\beta_1-\alpha_1\beta_2-\alpha_2}}$$

sont cogrédientes aux coefficients a.

On obtient la même propriété pour les expressions (2), en remplaçant, dans les sommes (1), les termes $b, \frac{d\varphi'}{dc}$ par $\frac{d^{\beta}\varphi_1}{dx_1^{\beta_1} dx_2^{\beta_2}}$ et $\varepsilon' x_1^{\beta_1-\alpha_1} x_2^{\beta_2-\alpha_2}$ (§§ 2 et 8).

Exemple. Les coefficients $a_1 a_2$ d'une forme linéaire ($\alpha = 1$) sont cogrédients aux expressions

$$\sum b_{\beta_1\beta_2} \frac{d\varphi'}{dc_{\beta_1-1\beta_2}}, \quad \sum b_{\beta_1\beta_2} \frac{d\varphi'}{dc_{\beta_1\beta_2-1}}.$$

X. *Si l'on a $\beta < \alpha$, les coefficients $a_{\alpha_1\alpha_2}$ sont cogrédients aux quantités*

$$\sum \zeta_1 b_{\beta_1\beta_2} c_{\alpha_1-\beta_1\alpha_2-\beta_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\sum \zeta_2 \frac{d^{\beta}\varphi_1}{dx_1^{\beta_1} dx_2^{\beta_2}} \frac{d\varphi''}{dx_1^{\alpha_1-\beta_1} dx_2^{\alpha_2-\beta_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

En effet, si dans la formule (3) on prend pour φ le produit de deux formes d'ordres β et $\alpha - \beta$, on obtient pour les dérivées D les expressions (4).

En remplaçant les coefficients b, c par des quantités cogrédientes, on vérifie immédiatement que les expressions (4) peuvent être remplacées par (5).

Pour $\beta = 1$, les sommes (5) deviennent

$$\alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial^{\alpha-1} \varphi''}{\partial x_1^{\alpha_1 - 1} \partial x_2} + \alpha_2 \frac{d\varphi_1}{dx_2} \frac{d^{\alpha-1}\varphi''}{dx_1 dx_2^{\alpha_2 - 1}}.$$

XI. *Pour* $\beta > \alpha$, *les produits* $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ *sont cogrédients aux sommes*

$$\sum \zeta x_1^{\beta_2} x_2^{\beta_1} \frac{d^{\beta-\alpha}\varphi}{dx_1^{\beta_1 - \alpha_1} dx_2^{\beta_2 - \alpha_2}} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

et

$$\sum \zeta_1 \frac{d\varphi}{db_{\beta_1 \beta_2}} \cdot c_{\beta_1 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

En effet, les produits $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ sont cogrédients aux dérivées

$$\Delta = \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial l_1^{\alpha_1} \partial l_2^{\alpha_2}}$$

où $l_1 l_2$ sont les coefficients d'une forme linéaire l_x. Pour $\varphi = (l_x)^\beta$, les dérivées Δ s'écrivent :

$$\sum \zeta x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} l_1^{\beta_1 - \alpha_1} l_2^{\beta_2 - \alpha_2}.$$

En remplaçant $l_1 l_2$ par les symboles $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}$ on obtient les sommes (6).

On déduit du reste les expressions (7) de (6) en substituant à $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$ et à $\frac{d^{\beta-\alpha}\varphi}{dx_1^{\beta_1 - \alpha_1} dx_2^{\beta_2 - \alpha_2}}$ des quantités cogrédientes (§§ 2 et 8).

XII. *Pour* $\beta < \alpha$, *les produits* $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}$ *sont cogrédients aux quantités*

$$\sum \zeta x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} y_1^{\alpha_1-\beta_1} y_2^{\alpha_2-\beta_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

et

$$\sum \zeta \frac{\partial^{\beta} \varphi_1}{\partial b_{\beta_1 \beta_2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial c_{\alpha_1-\beta_1 \alpha_2-\beta_2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

les lettres (y) *désignant des variables analogues à* (x).

Cet énoncé se vérifie facilement par le même genre de raisonnement qui a été indiqué plus haut; en outre la méthode employée permet, par combinaisons, d'obtenir d'autres exemples de quantités cogrédientes.

Nous terminerons en indiquant une remarque générale relative aux systèmes transformables que nous venons de considérer.

Les quantités $a_{\alpha_1 \alpha_2}$ et $\frac{\partial^{\alpha} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$ sont cogrédientes ; on peut dire qu'elles sont de mêmes poids α_1, α_2 pour les indices 1 et 2, en faisant abstraction du poids de φ qui est une constante. Les produits $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ et les dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2}}$ sont de poids négatifs $-\alpha_1$, $-\alpha_2$. Nous pouvons énoncer la loi suivante de formation des systèmes cogrédients étudiés ci-dessus :

Les quantités $a_{\alpha_1 \alpha_2}$, $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, $\frac{\partial^{\alpha} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$ *et* $\frac{\partial \varphi}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2}}$ *de poids* $k_1 k_2$ *sont cogrédientes à des sommes de produits de facteurs analogues, tels que les poids des facteurs associés ont pour sommes algébriques* k_1 *et* k_2.

C'est ce que l'on vérifie aisément d'après les formules (1) à (9).

TABLE

DES

VINGT VOLUMES DE LA DEUXIÈME SÉRIE

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

DE NOMS D'AUTEURS

TABLE

DES

VINGT VOLUMES DE LA DEUXIÈME SÉRIE

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

DE NOMS D'AUTEURS.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

Ocagne (d'), Remarques sur une transformation quadratique birationnelle réciproque, XVI (10 p.).

Petitbois (G.), Sur les courbes simpsoniennes ; formules pour le calcul approché des aires planes, XVIII (19 p.).

Phillipot (H.), Sur quelques points de la théorie des transformations linéaires, XX (14 p.).

Pizzetti, Sur le calcul du résultat d'un système d'observations directes, XV (36 p.).

Retali (V.), Sur le double contact et le contact quadriponctuel de deux coniques, XVIII (35 p.).

Rudski (M.-P.), Note sur la situation des racines des équations transcendantes $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$ où J désigne une fonction de Bessel, XVIII (29 p.).

Schönflies (A.), Sur la courbure des lignes décrites par les points d'un solide en mouvement (deux articles), XI (27 p.).

Schur (Friedr.), Sur la surface tétraédrale symétrique du quatrième ordre, XI (7 p.).

Sohet (A.), Mémoire sur les variations des hauteurs capillaires et des tensions superficielles de l'eau de l'alcool et des solutions d'eau et d'alcool avec la température. Températures critiques de l'eau, de l'alcool et des solutions d'eau et d'alcool, XX (56 p. et 1 pl.).

Stammer, Des surfaces réglées et des surfaces enveloppes, I (18 p.).

Studnicka (F.-J.), Sur l'analogue hyperbolique du nombre π, XIV (12 p.).

— Sur de nouvelles formules pour le calcul du nombre Π de Laisant XVII (7 p.).

Terssen (E.), Mémoire sur la résistance des canons frettés, VI (48 p.).

Ubaghs (P.), Notice sur l'observatoire de Cointe (Liége), XIV (14 p.).

Vaněček (J.-S.), Sur les faisceaux de surfaces du second ordre, X (16 p.).

— Sur la transformation des figures polaires réciproques, XI (21 p.).

— Sur les réseaux de surfaces du second ordre, XI (8 p.).

Versluys, Étude des singularités d'une surface du troisième ordre engendrée par un système de faisceaux homographiques H_2^3, XX (61 p.).

Weyr (Ém.), Sur les involutions supérieures représentées sur un même support, X (8 p.).

II. — Sciences naturelles.

CANDÈZE (E.), Revision de la monographie des Élatérides.
— 1er fascicule, IV (218 p.).
— 2e — V (32 p.).
— 3e — IX (117 p.).
— 5e — XVIII (76 p.).
— 6e — XIX (88 p.).

CHAPUIS (E.), Synopsis des Scolytides, III (58 p.).

CHARLIER (E.), Observations de tératologie, III (34 p. et 2 pl.).

CHEVROLAT (Aug.), Mémoire sur les Cléonides, V (118 p.).

DE KONINCK (L.-G.), Recherches sur les fossiles paléozoïques de la Nouvelle-Galles du Sud, VI (140 p. et 4 pl.); VII (257 p. et 19 pl.).

DONCKIER DE DONCEEL (H.), Liste des Sagrides, Criocérides, Clytérides, Mégalopides, Cryptocéphalides et Lamprosomides décrits postérieurement au catalogue de MM. Gemminger et Von Harold, XI (33 p.).

DUVIVIER (Ant.), Catalogue des Chrysomélides, Halticides et Galérucides décrits postérieurement à la publication du catalogue de Munich, XI (64 p.).

EICHHOFF, Ratio, descriptio, emendatio Tomicinorum, VIII (531 p. et 5 pl.).

LAMBOTTE (E.), La flore mycologique de la Belgique.
— Premier supplément comprenant les Hyménomycètes, Pyrénomycètes, Discomycètes, XIV (350 p. et 1 pl.).
— Deuxième supplément comprenant les Sphaeropsideae, Mélanconieae, Hyphomycètes, XVI (305 p. et pl^es).

LAMEERE (A.), Contributions à l'histoire des métamorphoses des Longicornes, XI (13 p. et 1 pl.).

LEFÈVRE (Ed.), Eumolpidarum hucusque cogitarum catalogus, XI (172 p.).

LENFANT (C.), Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Le genre *Delphinium,* XIX (46 p. et 11 pl.).

MANSION (A.), Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Le genre *Thalictrum,* XX (104 p. et 14 pl.).

MARSEUL (DE) (S.-A.), Monographie des Mylabrides, III (300 p. et 6 pl.).

MORREN (E.), Éloge de J. Th. Lacordaire, III (14 p.).

PERRIS, Les Oiseaux et les Insectes, III (58 p.).

Preudhomme de Borre (Alf.), Matériaux pour la faune entomologique de la province de Liége. — Coléoptères.

— Première et deuxième centuries, IX (59 p.).

— Troisième centurie. X (35 p.).

— Quatrième centurie, XV (51 p.).

— Répertoire alphabétique des noms spécifiques dans la sous-famille des Libellulines, XVI (38 p.).

Putzeys J., Note sur les *Notiophilus*, I (13 p.).

— Étude sur les *Amara*, I (112 p.).

— Essai sur les *Antarctia*, V (32 p.).

Remy (L.), Contribution à l'étude micrographique du poivre et de ses falsifications, XVIII (36 p. et 1 pl.).

Sichel, Considérations zoologiques sur la détermination de l'espèce, III (20 p.).

Simon, Aranéides nouveaux ou peu connus du midi de l'Europe, III (98 p.); V (174 p. et 3 pl.).

Sterckx (R.), Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Tribu des Clématidées, XX (88 p. et 15 pl.).

Van den Branden (C.), Énumération des Coléoptères phytophages décrits postérieurement au catalogue de MM. Gemminger et de Harold : Hispides et Cassidies, XI (16 p.).

Wildemann (De) (E.), Catalogue de la flore algologique de la Suisse, XIX (180 p.).

Winckler, Note sur une nouvelle espèce de *Lepidotus*, IV (4 p. et 1 pl.).



